

Topologie

Kurzskriptum nach einer Vorlesung von
Professor emer. Dr. K. H. Mayer

Universität Dortmund – Wintersemester 1997/98

Letzte Änderung: 18. April 2004

Dieses Kurzschrift ist aus meiner persönlichen Mitschrift der Vorlesung

Topologie

bei *Professor emer. Dr. K. H. Mayer* im Wintersemester 1997/98 entstanden. Ich habe versucht alles richtig wiederzugeben, kann allerdings keine Garantie darauf geben. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß dieses Skriptum Fehler enthält.

Dieses Skriptum darf nur umsonst oder zum Selbstkostenpreis weitergegeben werden. Ich untersage jede kommerzielle Nutzung durch Dritte. Dieses Skriptum ist weder eine offizielle noch eine von *Professor Mayer* autorisierte Version. Deshalb ist bei Fehlern zuerst davon auszugehen, daß diese von mir stammen.

Ingo Manfraß

Inhaltsverzeichnis zu Topologie I

INHALTSVERZEICHNIS ZU TOPOLOGIE I.....I

VORBEMERKUNG: 1

§ 0 MÄCHTIGKEIT VON MENGEN, DAS AUSWAHLAXIOM UND ÄQUIVALENTE AUSSAGEN: 1

§ 1 TOPOLOGISCHE RÄUME: 3

VERGLEICH VON TOPOLOGIEN: 4

STETIGE ABBILDUNGEN 6

§ 2 ERZEUGUNG VON TOPOLOGIEN 7

PRODUKTTOPOLOGIEN 8

GRUPPENAKTIONEN 9

DIE ORIENTIERTEN FLÄCHEN 10

DIE NICHTORIENTIERTEN FLÄCHEN 11

DAS CANTORSCHES DISKONTINUUM: 11

GEOMETRISCHE BESCHREIBUNG VON C: 11

SYMBOLISCHE DYNAMIK UND CHAOS 12

§ 3 ZUSAMMENHANG: 12

§ 4 FILTER UND KONVERGENZ 15

BEZIEHUNG ZWISCHEN KONVERGENZ VON FILTERN UND FOLGEN: 16

ANDERE MÖGLICHKEIT DER VERALLGEMEINERUNG VON FOLGEN 17

ÄQUIVALENZ VON NETZEN UND FILTERN: 18

§ 5 TRENNUNGSEIGENSCHAFTEN 18

REGULÄRE RÄUME 19

§ 6 NORMALE RÄUME: 20

LOKALENDLICHE SYSTEME UND ZERLEGUNG DER EINS 21

§ 7 KOMPAKTE RÄUME 22

Topologie I

KOMPAKTE METRISCHE RÄUME.....	24
LOKALKOMPAKTE RÄUME:	24
PARAKOMPAKTE RÄUME.....	25
§ 8 DIE VERVOLLSTÄNDIGUNG VON METRISCHEN RÄUMEN:.....	25
§ 9 DER SATZ VON STONE – WEIERSTRAB:.....	26
§ 10 FUNKTIONENRÄUME:	27
GLEICHGRADIGE STETIGKEIT UND DER SATZ VON ARZELA – ASCOLI:	29
FORMULIERUNG IN FUNKTIONEN THEORIE (VON FISCHER LIEB)	30
§ 11 ÜBERLAGUNGSABBILDUNGEN:	30
INDEX ZU TOPOLOGIE I.....	A

Vorbemerkung:

Definition einer Metrik:

Sei X eine Menge, d eine Metrik auf X mit $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$.

Eigenschaften der Metrik:

- (i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
- (ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii) $d(x,y) = d(y,x)$
- (iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$

Definition von offenen Mengen:

$x_0 \in X, \varepsilon > 0$
 $B(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X \mid d(x,x_0) < \varepsilon \}$ (offener Ball mit Mittelpunkt x_0 und Radius ε)

Sei nun $U \subseteq X$. U heißt offen : $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

grundlegende Eigenschaften offener Mengen:

- (i) U, V offen $\Rightarrow U \cap V$ offen
- (ii) $(U_i)_{i \in I}$ Familie von offenen Mengen $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ offen
- (iii) X und \emptyset sind offen

Beispiele

wichtig: p – adische Bewertung

§ 0 Mächtigkeit von Mengen, das Auswahlaxiom und äquivalente Aussagen:

0.1. Definition: A, B seien Mengen

- (i) A und B heißen gleich mächtig ($A \sim B$) : \Leftrightarrow es existiert eine bijektive Abbildung: $f: A \rightarrow B$ von A auf B .
- (ii) B heißt mächtiger als A ($B \geq A$) : \Leftrightarrow es gibt eine injektive Abbildung $f: A \rightarrow B$.

Bemerkung: (i) „gleich mächtig“ ist eine Äquivalenzrelation. Für $A \sim B$ schreibt man auch $\text{Kard}(A) = \text{Kard}(B)$ (Kardinalität)
(ii) „ \leq “ ist reflexiv und transitiv

Vereinbarung:

$$\mathbf{N} = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq 1\}$$

$$\mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N}.$$

0.2. Definition: (i) Eine Menge A heißt endlich $\Leftrightarrow A = \emptyset$ oder es existiert ein $n \in \mathbf{N}$, so daß $A \sim \{1, \dots, n\}$

(ii) Eine Menge A heißt abzählbar $\Leftrightarrow A \sim \mathbf{N}$

(iii) A heißt höchstens abzählbar $\Leftrightarrow A \leq \mathbf{N}$

0.3. Satz: A sei eine Menge, $A \neq \emptyset$, A ist höchstens abzählbar \Leftrightarrow es ex eine surjektive Abbildung: $f: \mathbf{N} \rightarrow A$.

Beispiele

Bemerkung: Jede Teilmenge eine höchstens abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.

0.4. Satz: Jede höchstens abzählbare Vereinigung von höchstens abzählbaren Mengen, ist höchstens abzählbar.

Jede höchstens abzählbare Vereinigung höchstens abzählbarer Mengen hat die Möglichkeit eine Teilmenge von $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Beispiele: 1) $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$

2) \mathbf{R} ist nicht abzählbar

3) \mathbf{R} ist ein \mathbf{Q} -Vektorraum

0.5. Satz (von Schröder – Bernstein)

Wenn $X \leq Y$ und $Y \leq X$, dann ist $X \sim Y$.

Bemerkung: Der Satz wurde von Georg Cantor vermutet und von Bernstein und Schröder unabhängig 1897 bewiesen (Jürgen Schmidt Mengenlehre)

Beispiele: \mathbf{R}^2 ist gleichmächtig mit $[0,1]^2$

0.6. Definition: Für jede Menge X ist die Potenzmenge $\mathcal{Q}(X)$ von X definiert als die Menge aller Teilmengen von X . ($\mathcal{Q}(X) = \{U \mid U \subset X\}$)

Bemerkung: 1. $\mathcal{Q}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Anzahl der Elemente: $1 = 2^0$

2. $\mathcal{Q}\{1, \dots, n\}$ Anzahl der Elemente: 2^n

3. $\mathcal{Q}(X) \sim 2^X := \{f: X \rightarrow \{0,1\}\}$

0.7. Satz: Für jede Menge X ist die Potenzmenge $\mathcal{Q}(X)$ echt mächtiger als X , d.h.

$X \leq \mathcal{Q}(X)$ und $\mathcal{Q}(X)$ ist nicht gleich mächtig wie X .

Übungsaufgabe: $\mathcal{Q}(\mathbf{N}) \sim \mathbf{R}$

Bemerkung: Die von Cantor ausgesprochene Vermutung $\mathcal{Q}(\mathbf{N}) \geq b \geq \mathbf{N}$

$\Rightarrow (b \sim \mathcal{Q}(\mathbf{N}))$ oder $b \sim \mathbf{N}$

heißt die Kontinuumshypothese (Khyp.) (1884)

Gödel zeigt 1938 Khyp. steht nicht im Widerspruch zu den übrigen Axiomen einer voll formalisierten Mengenlehre, der Neumann-Bergmannschen Mengenlehre. 1963 zeigte P.J. Cohen, daß die Khyp. nicht aus den übrigen Axiomen bewiesen werden kann.

0.8. Definition: (A, \leq) sei eine geordnete Menge (d.h. A eine Menge „ \leq “ seine reflexive und transitive Relation auf A , für die gilt $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow y = x$)

(i) (A, \leq) heißt linear geordnet $\Leftrightarrow \forall x, y \in A: x \leq y$ oder $y \leq x$.

(ii) $a_0 \in A$ heißt kleinstes Element von A $\Leftrightarrow \forall a \in A \ a_0 \leq a$.

(iii) $a_1 \in A$ heißt größtes Element von A $\Leftrightarrow \forall a \in A \ a \leq a_1$

(iv) $b_0 \in A$ heißt minimales Element $\Leftrightarrow \forall a \in A (a \leq b_0 \Rightarrow a = b_0)$

(v) b_1 heißt maximales Element $\Leftrightarrow \forall a \in A (b_1 \leq a \Rightarrow b_1 = a)$

Beispiel

0.9. Definition: (A, \leq) sei eine geordnete Menge:

(i) $B \subset A, a_0 \in A$ heißt obere Schranke von $B \Leftrightarrow \forall b \in B b \leq a_0$

$a_1 \in A$ heißt untere Schranke von $B \Leftrightarrow \forall b \in B a_1 \leq b$

(ii) (A, \leq) heißt wohlgeordnet \Leftrightarrow Jede nicht leere Teilmenge von A besitzt ein kleinstes Element. Die Ordnung „ \leq “ heißt dann eine Wohlordnung.

Bemerkung: Wenn (A, \leq) wohlgeordnet ist, dann ist (A, \leq) linear geordnet.

0.10. Definition: Eine geordnete Menge (A, \leq) heißt induktiv geordnet \Leftrightarrow jede linear geordnete Teilmenge von A besitzt eine obere Schranke.

Beispiel

0.11. Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Auswahlaxiom: Das cartesische Produkt jeder nichtleeren Familie von nichtleeren Mengen ist nicht leer.

(ii) Lemma von Zorn: Jede induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element.

(iii) Wohlordnungssatz (Satz von Zermelo): Jede Menge besitzt eine Wohlordnung.

Bemerkung: Auswahl läßt sich auch so formulieren:

Zu jeder nichtleeren Familie $(X_i)_{i \in I}$ von nichtleeren Mengen, existiert eine

Funktion $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$, so daß $f(i) \in X_i, \forall i \in I$ (Auswahlfunktion)

Anmerkung: I nicht leer \Leftrightarrow es ex. Auswahlfunktion

Folgerung aus dem Zorn'schen Lemma:

Jeder Vektorraum hat eine Basis.

§ 1 Topologische Räume:

1.1. Definition: X sei eine Menge. Eine topologische Struktur oder eine Topologie auf X ist eine Menge \mathcal{U} von Teilmengen von X , die folgende Eigenschaften besitzt:

(0.1) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus \mathcal{U} gehört zu \mathcal{U} .

(0.2) Der Durchschnitt je zweier Mengen aus \mathcal{U} gehört zu \mathcal{U} .

(0.3) \emptyset und X sind aus \mathcal{U} .

Die Elemente aus \mathcal{U} heißen offene Mengen von X bzgl. \mathcal{U} . $A \subset X$ heißt abgeschlossen bzgl. $\mathcal{U} \Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, \mathcal{U}) bestehend aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{U} auf X .

Bemerkung: (i) Durch vollständige Induktion läßt sich zeigen: $\forall n \in \mathbf{N}$ ist der Durchschnitt von n Elementen aus \mathcal{U} ein Element aus \mathcal{U} .

(ii) Die Eigenschaften aus (0.1) bis (0.3) sind äquivalent zu den beiden folgenden Eigenschaften:

(0'.1) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen auf \mathcal{U} gehört zu \mathcal{U} .

(0'.2) Der Durchschnitt je endlich vieler Mengen aus \mathcal{U} gehört zu \mathcal{U} .

(iii) Statt (X, \mathcal{U}) ist ein topologischer Raum sagt man auch X ist ein topologischer Raum.

Beispiele: (i) X beliebige Menge, $\mathcal{U} = \mathcal{O}(X)$

Dieses \mathcal{U} heißt die diskrete Topologie. (X, \mathcal{U}) heißt diskreter Raum.

(ii) X beliebige Menge, $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X . Dieses \mathcal{U} heißt die indiskrete Topologie.

(iii) (X, d) metrischer Raum. Die zugehörige metrische Topologie

$$\mathcal{U}_d := \{ U \subset X \mid \forall X \in U \exists \varepsilon > 0: B_d(x, \varepsilon) \subset U \}$$

! ! wobei $B_d(x, \varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \} \in \mathcal{U}_d$.

(iv) X sei eine Menge. Die kofinite Topologie \mathcal{L} auf X ist definiert als

$$\mathcal{L} := \{ U \subset X \mid U = \emptyset \vee X \setminus U \text{ ist endlich} \}$$

Vergleich von Topologien:

1.2. Definition: X sei eine Menge und \mathcal{T}, \mathcal{U} seien Topologien auf X . \mathcal{U} heißt feiner als \mathcal{T} und \mathcal{T} heißt gröber als $\mathcal{U} : \Leftrightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{U}$.

Bemerkung: (i) Die diskrete Topologie auf X ist feiner als jede andere.

Die indiskrete Topologie ist die gröbste Topologie auf X .

(ii) $\mathbf{Q}, \mathcal{U}_{||}$ sei durch den Absolutbetrag definiert und die metrische Topologie \mathcal{U}_p sei durch die p -adische Metrik gegeben, für eine Primzahl p . Beide Topologien sind nicht vergleichbar.

(iii) $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ und $c([a, b], \mathbf{R}) := \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid \text{stetig} \}$ \mathcal{U}_∞ definiert durch $||_\infty$, \mathcal{U}_1 durch $||_1$. Dann ist $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_\infty$

1.3. Definition: (X, \mathcal{U}) sei ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ heißt eine Basis von $\mathcal{U} : \Leftrightarrow$ jedes $U \in \mathcal{U}$ ist Vereinigung von Mengen aus \mathcal{C} .

Beispiele

1.3. Zusatz: Eigenschaften einer Basis \mathcal{C} der Topologie \mathcal{U} .

$$(B1) \bigcup_{U \in \mathcal{C}} U = X$$

$$(B2) \forall U, V \in \mathcal{C} \forall x \in U \cap V \exists B \in \mathcal{C} \mid x \in B \subset U \cap V$$

1.4. Satz: X sei eine Menge und \mathcal{C} eine Menge von Teilmengen von X , die (B1) und (B2) erfüllt. Dann existiert genau eine Topologie auf X , die \mathcal{C} als Basis hat.

1.5. Satz und Definition: X sei eine Menge und \mathcal{T} sei eine Teilmenge der Potenzmenge von X . Dann ist

$$\mathcal{C} := \{ U \subset X \mid U \text{ ist endlicher Durchschnitt von Mengen aus } \mathcal{T} \}$$

!!!!!!! ! ! ! ! ! ! oder $U = X$

Basis der gröbsten Topologie \mathcal{U} auf X , die \mathcal{T} enthält. \mathcal{T} heißt dann eine Subbasis von \mathcal{U} und \mathcal{U} heißt von der Subbasis \mathcal{T} erzeugte Topologie.

!

Beispiel

1.6. Definition: (X, \mathcal{U}) sei ein topologischer Raum, $A \subset X$. $U \subset X$ heißt Umgebung von $A : \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{U} \mid A \subset V \subset U$, wenn $x \in X$, dann heißt jede Umgebung von $\{x\}$ eine Umgebung von x . Die Menge aller Umgebungen von x wird mit $\mathcal{V}(x)$ bezeichnet und heißt Umgebungssystem von x .

Beispiel

1.7. Satz: (X, \mathcal{U}) topologischer Raum $U \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall x \in U \ U \in V(x)$.

1.7. Zusatz: Eigenschaften des Umgebungssystems:

- (U1) Jede Obermenge eines Elementes aus $V(x)$ gehört wieder zu $V(x)$
- (U2) Jeder endliche Durchschnitt von Umgebungen von Elementen aus $V(x)$ gehört zu $V(x)$.
- (U3) $U \in V(x) \Rightarrow x \in U$.
- (U4) Zu jedem $U \in V(x)$ existiert ein $V \in V(x)$, so daß für alle $y \in V$ gilt: $U \in V(y)$.

1.8. Satz: X sei eine Menge und V sei eine Funktion, die jedem $x \in X$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathcal{Q}(X)$ zuordnet, so daß für jedes $V(x)$ die Eigenschaften (U1) – (U4) gelten. Dann existiert genau eine Topologie \mathcal{U} auf X , so daß für jedes $x \in X$ die Menge $V(x)$ Umgebungssystem von x bzgl. \mathcal{U} ist.

1.9. Definition: (X, \mathcal{U}) topologischer Raum, $x \in X$.

Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{C}(x)$ von $V(x)$ heißt eine Umgebungsbasis oder ein Fundamentalsystem von Umgebungen von x genau dann, wenn zu jedem $U \in V(x)$ ein $B \in \mathcal{C}(x)$ existiert mit $B \subset U$.

- Beispiele: (i) X diskreter Raum, $x \in X$, $\{x\}$ Umgebungsbasis
(ii) (X, d) metrischer Raum, $\{B(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbf{N}\}$ ist Umgebungsbasis von x .

1.10. Definition: Man sagt: (X, \mathcal{U}) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom \Leftrightarrow jedes $x \in X$ besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.

1.11. Satz: (Eigenschaften der abgeschlossenen Mengen)

(X, \mathcal{U}) sei ein topologischer Raum

- (i) X und \emptyset sind abgeschlossen
- (ii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (iii) Die Vereinigung von je endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

1.12. Definition: (X, \mathcal{U}) topologischer Raum, $A \subset X$, $x \in X$.

x heißt innerer Punkt von $A \Leftrightarrow A \in V(x)$.

Die Menge der inneren Punkte von A heißt der offene Kern von A und wird mit $\overset{\circ}{A}$ bezeichnet.

1.13. Satz: (i) $\overset{\circ}{A}$ ist offen.

(ii) A offen $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

(iii) $\overset{\circ}{A}$ ist die Vereinigung aller in A enthaltenen offenen Mengen, also die größte in A enthaltene offene Menge.

1.14. Definition: (X, \mathcal{U}) topologischer Raum, $A \subset X$, $x \in X$.

(i) x heißt äußerer Punkt von $A \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{CA}$

(ii) x heißt Berührungspunkt von $A \Leftrightarrow \forall U \in V(x) \ U \cap A \neq \emptyset$.

Die Menge der Berührungspunkte von A heißt die abgeschlossene Hülle von A und wird mit \overline{A} bezeichnet.

Bemerkung: $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{CA}$, $\overset{\circ}{CA} = \overline{CA}$. (Damit und 1.13. zeigt man 1.15.)

1.15. Satz: (i) \overline{A} ist abgeschlossen

(ii) A abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

(iii) \overline{A} ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten und damit die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

(Anmerkung: $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$)

1.16. Definition: (X, \mathcal{U}) topologischer Raum, $x \in X$, $A \subset X$.

x heißt Randpunkt von A $:\Leftrightarrow$ jede Umgebung von x enthält Elemente aus A und aus $C A$.

Die Menge der Randpunkte von A heißt der Rand von A .

Bezeichnung: $\text{Rand}(A)$

Bemerkung: $\text{Rand}(A) = \{ x \in X \mid x \in \bar{A} \wedge x \notin \overset{\circ}{A} \} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap C \overset{\circ}{A}$
 $\Rightarrow \text{Rand}(A)$ ist abgeschlossen

Beispiele (u.a.: $\overline{B(a, \varepsilon)} \subset \bar{B}(a, \varepsilon)$, Gegenbeispiel zu „ \subset “: diskrete Metrik)

1.17. Definition: (X, \mathcal{U}) topologischer Raum, $A \subset X$.

A heißt dicht in X genau dann, wenn $X = \bar{A}$.

A heißt nirgends dicht in $X \Leftrightarrow \overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$

Beispiel: (i) \mathbf{Q} dicht in \mathbf{R}

(ii) $A := \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0 \}$. A ist nirgends dicht in \mathbf{R}^2

Stetige Abbildungen

1.18. Definition: (X, \mathcal{U}) , (Y, \mathcal{P}) seien topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $x \in X$.

f heißt in x stetig $:\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \exists U \in \mathcal{V}(x) f(U) \subset V$.

f heißt stetig $:\Leftrightarrow f$ ist stetig in jedem $y \in X$.

1.19. Satz: (X, \mathcal{U}) , (Y, \mathcal{P}) , (Z, \mathcal{T}) seien topologische Räume,

$f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen. $x_0 \in X$.

Wenn f in x_0 stetig ist und g in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

1.20. Satz: (X, \mathcal{U}) , (Y, \mathcal{P}) seien topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) Für alle $A \subset X$ ist $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

(iii) Das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von Y unter f ist abgeschlossen.

(iv) Das Urbild jeder offenen Teilmenge von Y unter f ist offen.

Beispiele: (i) Jede Abbildung aus einem diskreten Raum ist stetig.

(ii) Jede Abbildung in einen indiskreten Raum ist stetig.

(iii) Identität nicht unbedingt stetig

1.21. Definition: (X, \mathcal{U}) , (Y, \mathcal{P}) topologische Räume.

$f: X \rightarrow Y$ heißt eine offene Abbildung $:\Leftrightarrow$ Für alle $U \in \mathcal{U}$ ist $f(U) \in \mathcal{P}$.

f heißt abgeschlossene Abbildung $:\Leftrightarrow$ Für alle $A \subset X$ mit $A = \bar{A}$ ist
 $f(A) = \overline{f(A)}$

Bemerkung: Wenn \mathcal{C} eine Basis der Topologie von X ist, so gilt:

f offen $\Leftrightarrow f(B)$ offen für alle $B \in \mathcal{C}$.

1.22. Definition: X , Y seien topologische Räume. Eine bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt ein Homöomorphismus oder eine topologische Abbildung genau dann, wenn f, f^{-1} stetig sind.

1.23. Satz: X , Y topologische Räume, f bijektiv, $f: X \rightarrow Y$ bijektive Abbildung.

f ist Homöomorphismus $\Leftrightarrow f$ ist offen (abgeschlossen) und stetig

1.24. Satz: Es seien X eine Menge und \mathcal{U}_2 und \mathcal{U}_3 seien Topologien auf X .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) U_2 ist feiner als U_3 .
- (ii) $\text{Id}_X: (X, U_2) \rightarrow (X, U_3)$ ist stetig
- (iii) Für jedes $x \in X$ ist jede Umgebung bzgl. U_3 auch Umgebung bzgl. U_2 .
- (iv) Für jede Teilmenge A von X ist die abgeschlossene Hülle von A bzgl. U_2 in der abgeschlossenen Hülle von U_3 enthalten.
- (v) Jede bzgl. U_3 abgeschlossene Teilmenge von X ist auch bzgl. U_2 abgeschlossen.

§ 2 Erzeugung von Topologien

Vorbemerkung: Bei den aus der Mengenlehre bekannten Klassifikationen gibt es natürliche Abbildungen zwischen der konstruierten Menge und den Mengen, aus denen das Objekt konstruiert wurde. Die Topologie auf dem neuen Objekt wird so gewählt, daß die natürlichen Abbildungen stetig sind.

2.1. Definition: X Menge und $(X_i, U_i)_{i \in J}$ und zu jedem $i \in J$ existiert eine Abbildung:
 $f: X \rightarrow X_i$.

Dann ist $\mathcal{T} := \{ f_i^{-1}(U_i) \mid i \in J, U_i \in U_i \}$ Subbasis einer Topologie U auf X . U heißt die Initialtopologie von X bzgl. $(f_i)_{i \in J}$.

2.2. Satz (Eigenschaften der Initialtopologie)

- (i) Die Initialtopologie auf X bzgl. $(f_i)_{i \in J}$ ist die grösste Topologie auf X bzgl. der alle f_i stetig sind.
- (ii) Ist $g: Z \rightarrow X$ eine Abbildung eines topologischen Raumes Z in X mit Initialtopologie bzgl. U_1 , so ist g genau dann stetig, wenn $f_i \circ g$ stetig ist für alle $i \in J$.

Beispiele für Initialtopologien:

Sei (X, U) topologischer Raum, $A \subset X$, $i_A: A \rightarrow X$ Inklusionsabbildung
 $U \in U \Rightarrow i_A^{-1}(U) = U \cap A$.

2.3. Definition (X, U) sei ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X .

$U_A := \{ U \cap A \mid U \in U \}$ heißt Teilraumtopologie oder von U induzierten Topologie oder Spurtopologie.

(A, U_A) heißt Teilraum oder Unterraum von (X, U) , kürzer A heißt Teilraum von X .

Beispiel: $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$

Bemerkung: $C \subset A$ abgeschlossen $\Leftrightarrow A \setminus C \in U_A$ d.h. es ex. $U \in U$ mit $U \cap A = A \setminus C$
 $\Rightarrow (X \setminus U) \cap A = C \Leftrightarrow$ es gibt eine abgeschlossene Teilmenge D von X mit $D \cap A = C$.

2.4. Satz: (A, U_A) sei Teilraum von (X, U)

- (i) $A \in U \Leftrightarrow U_A \subset U$
- (ii) A ist abgeschlossene Teilmenge von $X \Leftrightarrow$ jede in A abgeschlossene Menge ist in X abgeschlossen.

2.5. Satz: (X, U) topologischer Raum, $A \subset X$.

- (i) U_A ist die grösste Topologie auf A bzgl. $i_A: A \rightarrow X$ stetig ist.
- (ii) Wenn $g: Z \rightarrow A$ eine Abbildung des topologischen Raumes Z in den Teilraum A von X ist, so ist g stetig genau dann, wenn $i_A \circ g: Z \rightarrow X$ stetig ist.

2.6. Satz: X, Y topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$, A_1, \dots, A_n abgeschlossene Teilmengen

von X mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$.

Dann gilt: f stetig $\Leftrightarrow f|_{A_i}: A_i \rightarrow Y$ ist stetig für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

Produkttopologien

Skalarprodukt: $\prod_{i \in J} X_i := \{x : J \rightarrow \cup X_i \mid x(i) \in X_i\}$

Statt $x(i)$ schreibt man x_i und statt x schreibt man $(x_i)_{i \in J}$ oder (x_i) .

Projektion: $\pi_i: X \rightarrow X_i$ mit $\pi_i(x) = x(i) = x_i$.

2.7. Definition: Es seien $(x_i, U_i)_{i \in J}$ eine Familie von topologischen Räumen, $X = \prod_{i \in J} X_i$

sei das cartesische Produkt der X_i und $\pi_i: X \rightarrow X_i$ sei die natürliche Projektion von X auf X_i für jedes $i \in J$. Die Initialtopologie auf X bzgl.

$(\prod_{i \in J} U_i)$ heißt die Produkttopologie auf X und (X, U) heißt das topologische Produkt von $(X_i, U_i)_{i \in J}$.

Beispiel

2.8. Satz (Eigenschaften der Produkttopologie)

(X, U) sei das topologische Produkt von $(X_i, U_i)_{i \in J}$, $\pi_i: X \rightarrow X_i$ die natürlichen Projektionen.

(i) Für jedes $i \in J$ ist π_i stetig und offen.

(ii) U ist die größte Topologie auf X bzgl. der alle π_i stetig sind.

(iii) Ist $g: Z \rightarrow X$ eine Abbildung des topologischen Raumes Z in X , so ist g stetig $\Leftrightarrow \pi_i \circ g$ stetig für jedes $i \in J$.

2.9. Korollar: $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in J$. Dann gilt

f stetig $\Leftrightarrow \forall i \in J$ f_i stetig

$X \rightarrow$ Initialtopologie, Teilraumtopologie, Produkttopologie

Beispiel (Standard-Topologie = Produkttopologie)

Finaltopologie $\rightarrow X$

2.10. Satz: $(X_i, U_i)_{i \in J}$ sei eine Familie von topologischen Räumen. X eine Menge und für jedes $i \in J$ sei $f_i: X_i \rightarrow X$ eine Abbildung.

Dann hat die Topologie $U := \{U \subset X \mid \forall i \in J$ $f_i^{-1}(U) \in U_i\}$ folgende Eigenschaften:

(i) U ist die feinste Topologie auf X bzgl. der alle f_i stetig sind.

(ii) Ist $g: (X, U) \rightarrow (Y, T)$ eine Abbildung, so gilt:

g ist stetig $\Leftrightarrow \forall i \in J$ $g \circ f_i$ stetig

2.11. Definition: Die in 2.10. eingeführte Topologie U von X heißt die Finaltopologie auf X für $(f_i)_{i \in J}$.

2.12. Definition: $(X_i, U_i)_{i \in J}$ sei eine Familie von topologischen Räumen, $X := \bigcup_{i \in J} X_i \times \{i\}$

und für jedes $i \in J$ sei $f_i: X_i \rightarrow X$ definiert durch $f_i(x) = (x, i)$. Die Finaltopologie auf X für $(f_i)_{i \in J}$ heißt Summentopologie und X mit dieser Topologie heißt die topologische Summe der (X_i) .

Bemerkung:(i) $X_i \times \{i\}$ wird gebildet, um zu garantieren, daß Räume punktfremd sind.
 Wenn die (X_i) paarweise punktfremd sind, kann man $\cup X_i$ statt $\cup X_i \times \{i\}$ betrachten.

(ii) \cup Finaltopologie auf $X := \bigcup_{i \in J} X_i \times \{i\}$.

$$U \in \cup \Rightarrow \forall i \in J \ f_i^{-1}(U) \in U_i$$

$$f_i^{-1}(U) = \{ x \in X_i \mid (x,i) \in U \} \Rightarrow U = \bigcup_{i \in J} U_i \times \{i\} \text{ mit } U_i \in U_i$$

D.h.: Wenn $X_i \cap X_k = \emptyset$ für $i \neq k$, dann ist \cup die Vereinigung der $(U_i)_{i \in J}$.

(Die Finaltopologie P auf X/R für π ist $P = \{ U \subset X/R \mid \pi^{-1}(U) \in \cup \}$)

2.13. Definition: (X, \cup) topologischer Raum, R Äquivalenzrelation auf X .

Die feinste Topologie auf X/R bzgl. der die natürliche Projektion $\pi: X \rightarrow X/R$ stetig ist, heißt die Quotiententopologie auf X/R , und X/R mit dieser Topologie heißt Quotientenraum von X nach R .

2.14. Satz: (X, \cup) , R , π wie in 2.13., $f: X/R \rightarrow Z$ sei eine Abbildung in den topologischen Raum Z . Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f \circ \pi \text{ stetig}$$

Beispiel: $X = [0,1] \times [0,1]$ (R ist „Randrelation“)

X/R heißt Möbiusband.

2.15. Definition: (X, \cup) , (Y, T) seien topologische Räume, und $f: X \rightarrow Y$ sei surjektiv.

f heißt identifizierend und T heißt Identifizierungstopologie genau

dann, wenn T die finale Topologie bzgl. f ist, d.h.: $U \in T \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \cup$

Gruppenaktionen

2.16. Definition: G sei eine Gruppe und (X, \cup) eine topologischer Raum.

Eine Aktion von G auf X ist eine Abbildung $\alpha: G \times X \rightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(i) \ \forall x \in X \ \forall g, h \in G \ \alpha(g \cdot h, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$$

$$(ii) \ \forall x \in X \ \alpha(e, x) = x \quad , \text{ wo } e \in G \text{ das neutrale Element bezeichnet.}$$

Statt $\alpha(g, x)$ schreibt man auch kürzer gx

$$\text{Bei} \quad (i) \ (gh)x = g(hx)$$

$$(ii) \ ex = x$$

Bemerkung: Für alle $g \in G$ ist $\alpha_g: X \rightarrow X$ mit $\alpha_g(x) = \alpha(g, x)$ bijektiv.

$\alpha_{g^{-1}}$ ist zu α_g invers.

α definiert eine Äquivalenzrelation R auf X

$$\forall x, y \in X \ (xRy \Leftrightarrow \exists g \in G \ y = gx)$$

Der Quotientenraum X/R wird mit X/G bezeichnet. („Orbitraum“ (?))

Beispiele (Die projektiven Räume):

$$(i) \ G = S^0 = (\{1, -1\}, \cdot)$$

$$X = S^n = \{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\|_e = 1 \}$$

Gruppenaktion:

$$S^0 \times S^n \rightarrow S^n$$

$$g(x_1, \dots, x_{n+1}) = (gx_1, \dots, gx_{n+1})$$

$\mathbf{RP}^n := S^n/S^0$ heißt der n -dimensionale reelle projektive Raum.

$$\{x, -x\} = [x] \in S^n/S^0, \quad x \in S^n$$

$$(ii) \ G = S^1 := (\{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \}, \cdot)$$

$$S^{2n+1} = \{ (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1 \}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{2n+2} & z_j &= \alpha_j + i \cdot \beta_j \\ (z_1, \dots, z_{n+1}) &\mapsto (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) & & \mathbf{R}\text{-Vektorraum} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n |z_j|^2 = \sum_{j=1}^n (\alpha_j^2 + \beta_j^2) \quad \text{Isomorphismus, } \|\cdot\|_e \text{ erhaltend}$$

$$\begin{aligned} \text{Gruppenaktion: } & S^1 \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1} \\ & z(z_1, \dots, z_{n+1}) = (zz_1, \dots, zz_{n+1}) \end{aligned}$$

$\mathbb{C}P^n := S^{2n+1}/S^1$ heißt der n-dimensionale komplexe projektive Raum.

$$x \in S^{2n+1} \quad [x] \in \mathbb{C}P^n, \quad [x] = \{ z x \mid z \in S^1 \}$$

$n = 1$ $\mathbb{C}P^1$ ist homöomorph zu S^2 (Riemannsche Zahlentheorie (?))

Quaternionen $\mathbb{I} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$ ($\mathbb{I}, +, \cdot$) ist ein Schiefkörper.

\mathbb{I} ist ein \mathbf{R} -Vektorraum.

$$\text{Basis: } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E}, \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{=I}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=J}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{=K}$$

$$EI = I, JK = I, IK = -J, IJ = -JI, IJ = K, I^2 = J^2 = K^2 = -E$$

$S^3 = (\{ h \in \mathbb{I} \mid |h| = 1 \}, \cdot)$ Gruppe

$$\text{Gruppenaktion: } S^3 \times S^{4n+3} \rightarrow S^{4n+3}$$

$$(z, x) \rightarrow x z^{-1}$$

$S^{4n+3} / S^3 =: \mathbb{I}P^n$ heißt der n - dim quaternionaler projektiver Raum

2.17. Definition: X, Y seien disjunkte topologische Räume. A abgeschlossene Teilmenge von X . $f: A \rightarrow Y$.

Auf der topologischen Summe $X + Y$ wird folgende Äquivalenzrelation

R eingeführt: $x, y \in X + Y$

$x R y : \Leftrightarrow$ (i) $x = y$

(ii) $x \in A$ und $y \in A$ und $f(x) = f(y)$

(iii) $x \in A$ und $y \in f(A)$ und $y = f(x)$

(iv) $y \in A$ und $x \in f(A)$ und $x = f(y)$

Der Quotientenraum $(X+Y)/R$ wird mit $X \bigcup_f Y$ bezeichnet und heißt der durch Verkleben von X mit Y mittels f entstandene Raum.

Beispiel

2.18. Definition: $f: X \rightarrow Y$ Abbildung

Eine Teilmenge U von X heißt satuiert bzgl. $f : \Leftrightarrow f^{-1}(f(U)) = U$.

2.19. Satz: $(X, \mathbb{I}U), (Y, \mathbb{I}T)$ seien topologische Räume. $f: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. $U \in \mathbb{U}$ sei satuiert bzgl. f .

Wenn f identifizierend ist, dann ist $f^* := f|_U : U \rightarrow f(U)$.

Die orientierten Flächen

Auf dem Einheitskreis im \mathbf{R}^2 werden in gleichen Abständen $4p$ Punkte gewählt. Die Punkte werden entgegen dem Uhrzeigersinn mit $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots, D_p$ bezeichnet. E_p bezeichnet die konvexe Hülle dieser Punkte. Es wird nun folgende Relation R' einge-

führt:

$x R' y : \Leftrightarrow$ (i) $x = y$

(ii) $x \in A_i B_i, y \in C_i D_i$ und es ex. ein $t \in [0,1]$ mit $x = (1-t)A_i + tB_i$ und $y = (1-t)D_i + tC_i$.

(iii) $x \in B_i C_i$ und $y \in D_i A_{i+1}$ (wo das $p+1$ ggf. als 1 zu lesen ist) und es ex. ein $t \in [0,1]$, so daß $x = (1-t)B_i + tC_i$ und $y = (1-t)A_{i+1} + tD_i$

Sei R nun die kleinste Äquivalenzrelation, die R' enthält und $E_p / R = F_p$ heißt orientierbare Fläche vom Geschlecht (genus) p . [weitere Informationen: S. 28 – 32 Mayer: Algebraische Topologie]

Die nichtorientierten Flächen

$p \geq 2$. Auf dem Einheitskreis werden $2p$ Punkte mit gleichem Abstand gewählt. Die Punkte werden entgegen dem Uhrzeigersinn gewählt mit A_1, B_1, \dots, B_p .

$V_p :=$ konvexe Hülle (A_1, \dots, B_p) .

Auf V_p wird die Relation R' eingeführt durch $x R' y : \Leftrightarrow$

(i) $x = y$

(ii) $x \in A_i B_i$ und $y \in B_i A_{i+1}$ ($A_{p+1} = A_1$) und es ex. $t \in [0,1]$, so daß gilt:

$$x = (1-t) A_i + tB_i \text{ und}$$

$$y = (1-t) B_i + tA_i.$$

R sei die kleinste Äquivalenzrelation auf V_p , die R' enthält. Der Quotientenraum

$U_p := V_p / R$ heißt nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht p .

Das Cantorsche Diskontinuum:

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Familie von topol. Räumen mit $A_n = \{0, 2\}$ mit der diskreten Topologie.

$\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ bezeichnet das topologische Produkt $p: \prod_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow \mathbf{R}$ mit

$$p((a_n)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$$

und $p(\prod_{n=1}^{\infty} A_n) \subseteq [0, 1]$ mit der Majorante 1.

Sei $\varphi: \prod_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow \mathbf{R}$ mit $\varphi((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ ist eine bijektive Abbildung von $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ auf das

Bild $C := \varphi(\prod_{n=1}^{\infty} A_n) \subset [0,1]$.

Geometrische Beschreibung von C:

C besteht aus allen reellen Zahlen aus $[0, 1]$, der eine triadische Darstellung $(0, 1, 2)$ besitzen, in der 1 nicht vorkommt.

$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$ ist abgeschlossen in \mathbf{R}

Anmerkungen: $\varphi: \prod_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow \mathbf{R}$ ist ein Homöomorphismus.

$\psi: \prod_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow [0,1]$, definiert durch $\psi((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$, ist stetig und surjektiv.

ψ ist nicht injektiv.

Bemerkung: C ist überabzählbar.

Die Menge c heißt Cantorsches Diskontinuum.

Anmerkungen: Es gibt einen Homöomorphismus $h: \prod_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} A_n \times \dots \times \prod_{n=1}^{\infty} A_n}_{k\text{-mal}}$

für jede natürliche Zahl k .

Für jede natürliche Zahl k ist die Abbildung

$$C \xrightarrow{\varphi^{-1}} \prod_{n=1}^{\infty} A_n \xrightarrow{h} \left(\prod_{n=1}^{\infty} A_n \right)^k \xrightarrow{\psi^k} [0,1]^k \text{ stetig und surjektiv.}$$

2.19. Satz: Für jedes $k \in \mathbf{N}$ existiert eine stetige surjektive Abbildung $g: I \rightarrow I^k$.

Jede solche Abbildung heißt eine Peano-Kurve. (Achtung: g nicht homöomorph)

Symbolische Dynamik und Chaos

Definition: (X,d) sei ein metrischer Raum und $f: X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

Die Folge (f^0, f^1, \dots) mit $f^0 = \text{Id}_X, f^{k+1} = f \circ f^k$ heißt ein direktes dynamisches System auf X .

Für jedes $x \in X$ heißt die Menge $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ die Bahn von x unter f (oder auch der Orbit von x unter f).

$x \in X$ heißt Fixpunkt : $\Leftrightarrow f(x) = x$.

$x \in X$ heißt periodischer Punkt : $\Leftrightarrow \exists k > 0, f^k(x) = x$.

k heißt dann die Periode von x .

Beispiel: 1. mathem. Modell für Population

$$2. X = \prod A_n, d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^{k+1}}$$

Definition: Ein diskretes dynamisches System $f: X \rightarrow X$ heißt chaotisch, wenn es die folgenden Eigenschaften hat:

(i) Die Menge der periodischen Punkte ist dicht in X .

(ii) Es gibt ein $x \in X$, dessen Orbit unter f dicht ist (d.h. f ist topologisch transitiv)

(iii) Das System hängt sensitiv vom Anfangswert ab, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in X \forall U \in \mathcal{V}(x) \exists y \in U \exists n \in \mathbf{N} : d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon.$$

Satz: Die Shift - Abbildung $\sigma: \prod A_n \rightarrow \prod A_n$ ist ein chaotisches System.

§ 3 Zusammenhang:

3.1. Definition: X sei topologischer Raum, X heißt zusammenhängend : \Leftrightarrow Es gibt nicht zwei nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen von X die X überdecken, d.h. $\neg: \exists u, v \in \mathcal{U}!! \forall U \neq \emptyset, V \neq \emptyset \wedge U \cap V = \emptyset \wedge U \cup V = X$.

Eine Teilmenge A von X heißt zusammenhängend \Leftrightarrow der Teilraum A ist zusammenhängend.

Beispiele X mit diskreter Topologie und mind. 2 Elemente ist nicht zusammenhängend.
 X mit indiskreter Topologie ist zusammenhängend.

X das Cantorsche Diskontinuum ist nicht zusammenhängend

3.2. Satz: Eine Teilmenge A von \mathbf{R} , die wenigstens 2 Punkte enthält, ist zusammenhängend genau dann, wenn A ein Intervall ist (dabei dürfen die Intervalle unbeschränkt sein)

3.3. Satz: X sei ein topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist zusammenhängend

(ii) X und \emptyset sind die einzigen offenen Teilmengen von X die offen und abgeschlossen sind

(iii) es gibt keine stetige surjektive Abbildung von X auf einen diskreten Raum, der wenigstens zwei Elemente enthält.

3.4. Korollar: Jede stetige Abbildung eines zusammenhängenden topologischen Raumes in einen diskreten Raum ist konstant.

3.5. Satz: X sei ein topologischer Raum, $A, B \subset X$ und $A \subset B \subset \overline{A}$. Wenn A zusammenhängend ist, dann ist B zusammenhängend.

3.6. Satz: X sei ein topologischer Raum und $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von X .

Wenn $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$, dann ist $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ zusammenhängend.

3.7. Satz: X, Y seien topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung; Wenn X zusammenhängend ist, ist $f(X)$ zusammenhängend.

Beispiel: Zusammenhängende Teilmengen von \mathbf{R} sind einpunktige Teilmengen oder Intervalle.

$f: X \rightarrow Y$ stetig. X zusammenhängend $\Rightarrow f(X)$ ist zusammenhängend.

3.8. Korollar (Zwischenwertsatz): X topologischer Raum, $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ stetig, $a, b \in f(X)$ mit $a < b$.

Wenn X zusammenhängend ist, dann ist $[a, b] \subset f(X)$, d.h. f nimmt jeden Wert zwischen a und b an.

3.9. Satz: $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine nichtleere Familie von topologischen Räumen und für alle $\alpha \in A$ sei $X_\alpha \neq \emptyset$.

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ist zusammenhängend \Leftrightarrow für jedes $\alpha \in A$ ist X_α zusammenhängend.

Hilfssatz: Sei $a \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, $Y := \{ x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \mid x_\alpha \neq a_\alpha \text{ für höchstens endlich viele } \alpha \in A \}$.

Dann ist $\overline{Y} = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

3.10. Definition: Es seien X ein topologischer Raum und $x \in X$.

Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X , die x enthalten, heißt die Zusammenhangskomponente von X und wird mit $K(x)$ bezeichnet.

Ein topologischer Raum X heißt total unzusammenhängend genau dann, wenn für alle $x \in X$ gilt $K(x) = \{x\}$.

Bemerkung: $K(x)$ ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X , die x enthält.

Beispiele: (i) \mathbf{Q} ist total unzusammenhängend.

(ii) X diskreter Raum $\Rightarrow X$ total unzusammenhängend

(iii) $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ nichtleere Familie von nichtleeren diskreten Räumen.

Das topologische Produkt $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ist dann total unzusammenhängend.

Spezialfall: Das Cantorsche Diskontinuum C ist total unzusammenhängend.

3.11. Satz (Eigenschaften von $K(x)$)

X topologischer Raum, $x, y \in X$. Dann gelten:

- (i) $K(x)$ ist zusammenhängend.
- (ii) $\overline{K(x)} = K(x)$
- (iii) $K(x) \cap K(y) = \emptyset$
- (iv) Wenn $U \subset X$, $x \in U$ und U offen und abgeschlossen, dann ist $K(x) \subset U$.
- (v) $\bigcup_{x \in X} K(x) = X$

3.12. Satz: X, Y seien topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung.

Dann gilt für alle $x \in X$, daß $f(K(x)) \subset K(f(x))$.

Wenn f ein Homöomorphismus ist, dann induziert f eine bijektive Abbildung der Zusammenhangskomponenten von X auf die Menge der Zusammenhangskomponenten von Y und für jedes $x \in X$ ist $f|K(x): K(x) \rightarrow K(f(x))$ ein Homöomorphismus.

Beispiel: $\mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ nicht homöomorph zu $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

3.13. Definition: X topologischer Raum.

Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung $s: [0, 1] \rightarrow X$.

$s(0)$ heißt Anfangspunkt und $s(1)$ heißt Endpunkt von s .

X heißt wegweise zusammenhängend (oder: wegzusammenhängend)

$:\Leftrightarrow$ zu je zwei Punkten $x, y \in X$ existiert ein Weg s in X mit $s(0)=x$ und $s(1)=y$.

Bemerkung: Wenn $s: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg ist mit $s(0)=x$ und $s(1)=y$, dann ist $\bar{s}: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\bar{s}(t)=s(1-t)$ ein Weg mit $\bar{s}(0)=s(1)=y$ und $\bar{s}(1)=s(0)=x$. (Umkehrung)
(ähnlich: Verknüpfung * zweier Wege, ist natürlich selbst wieder Weg)

3.14. Satz: Jeder wegweise zusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.

Beispiele: Umkehrung von 3.14. gilt i. allg. nicht:

$X = \{(x, \sin(1/x) \mid x \in]0, \infty[\cup \{(x, y) \mid y \in [-1, 1]\}$ ist zusammenhängend, aber nicht wegweise zusammenhängend.

3.15. Satz: Seien X, Y topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ stetig. Wenn X wegweise zusammenhängend ist, dann ist auch $f(X)$ wegweise zusammenhängend.

3.16. Satz: X topologischer Raum. X wegweise zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ es ex ein x_0 aus X , so daß zu jedem $x \in X$ ein Weg $c: [0, 1] \rightarrow X$ existiert mit $c(0) = x_0$ und $c(1) = x$.

Beispiele: (i) D^n ist wegweise zusammenhängend (wähle als $x_0 = 0$)

(ii) S^n ist wegweise zusammenhängend ($1 \leq n$).

3.17. Definition: X topologischer Raum, X heißt lokal zusammenhängend (lokal wegweise zusammenhängend) $:\Leftrightarrow$ jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis, die aus zusammenhängenden (wegweise zusammenhängenden) Umgebungen von x besteht.

Beispiel: $U \subset \mathbf{R}^n$ offen $\Rightarrow U$ ist lokal wegweise zusammenhängend.

3.18. Satz: X topologischer Raum. Wenn X zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend, dann ist X wegweise zusammenhängend.

Bemerkung: X topologischer Raum. X heißt n – dimensional lokal euklidisch $:\Leftrightarrow$ jedes $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung U , die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge von \mathbf{R}^n .

Diese Räume sind lokal wegweise zusammenhängend.

Beispiel: Aus wegweiser Zusammenhang folgt i. all. nicht lokaler Zusammenhang.

§ 4 Filter und Konvergenz

4.1. Definition: X sei ein topologischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , $x \in X$.

(i): (x_n) konvergiert gegen $x : \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x) \exists n_0 \forall n > n_0: x_n \in U$.

Dafür schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$. x heißt Grenzwert von x_n .

(ii) x heißt ein Häufungspunkt von (x_n)

$: \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x) \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists v \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \text{ und } x_n \in U)$

Bemerkung: Im allgemeinen ist der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig bestimmt. Im indiskreten Raum konvergiert jede Folge gegen $x \in X$.

4.2. Satz: X, Y seien topologische Räume, X erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom.

(i) Für alle $a \in X$ und alle $A \subset X$ gilt:

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \forall n \in \mathbb{N} x_n \in A \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$$

(ii) $f: X \rightarrow Y$ ist in $a \in X$ stetig \Leftrightarrow für alle Folgen (x_n) in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$

gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f(a)$.

Beispiel: Es gibt eine überabzählbare wohlgeordnete Menge (Ω, \leq) mit folgenden Eigenschaften:

(i) Ω besitzt ein größtes Element ω_1

(ii) $\forall \alpha \in \Omega (\alpha < \omega_1 \Rightarrow \{ \beta \in \Omega \mid \beta \leq \alpha \})$ ist höchstens abzählbar

Die Elemente aus Ω heißen Ordinalzahlen, ω_1 heißt erste nicht abzählbare Ordinalzahl. $\Omega_0 := \Omega \setminus \{ \omega_1 \}$ heißt Menge der abzählbaren Ordinalzahlen.

Das kleinste Element von Ω wird mit 1 bezeichnet.

Auf Ω wird die Topologie (Ordnungstopologie) gewählt mit einer Subbasis, die aus den Mengen $[1, \alpha[= \{ x \in \Omega \mid 1 \leq x < \alpha \}$ und $] \alpha, \omega_1]$ mit $\alpha \in \Omega_0$.

1. ω_1 ist Berührungspunkt von Ω_0 , aber es gibt keine Folge in Ω_0 mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega_1.$$

2. Es existiert $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so daß f in ω_1 nicht stetig, aber für jede Folge

$$(x_n) \text{ in } \Omega \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega_1 \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\omega_1)$$

4.3. Definition: X sei eine Menge.

Ein Filter auf X ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X mit folgenden Eigenschaften:

(F1) Jede Teilmenge von X , die ein Element aus G enthält, gehört zu G .

(F2) Alle endlichen Durchschnitte von Elementen aus G gehört zu G .

(F3) Die leere Menge gehört nicht zu G .

Beispiel

(i) X topologischer Raum, $x \in X$.

Das Umgebungssystem $\mathcal{V}(x)$ ist ein Filter auf X .

Der heißt der Umgebungsfiter von x .

(ii) $X \neq \emptyset$ Menge $G = \{ X \}$ ist ein Filter

(iii) X sei eine nicht endliche Menge.

$G := \{ U \subset X \mid X \setminus U \text{ endlich} \}$ ist ein Filter auf X .

Der Filter auf \mathbf{N} , der aus den Komplementen der endlichen Teilmengen um \mathbf{N} besteht, heißt Fréchet-Filter.

Bemerkung: $C \subset \mathcal{O}(X)$??????

4.4. Satz: Es sei C eine nichtleere Teilmenge der Potenzmenge der Menge X .

$G := \{ U \subset X \mid \forall B \in C \ B \subset U \}$ ist ein Filter auf X genau dann, wenn folgende Aussagen gelten:

$$(B1) \quad \forall A, B \in C \ \exists C \in C \ C \subset A \cap B$$

$$(B2) \quad \emptyset \notin C$$

G heißt der von C erzeugte Filter.

4.5. Definition: G sei ein Filter auf X .

Eine Teilmenge C von G heißt eine Filterbasis von G

$$:\Leftrightarrow \forall F \in G \ \exists B \in C \ B \subset F.$$

Bemerkung: Wenn C eine Filterbasis des Filters G ist, dann erfüllt C (B1) und (B2).

4.6. Definition: G, G' seien Filter auf der Menge X .

G heißt feiner als G' und G' gröber als G $:\Leftrightarrow G' \subset G$.

G heißt echt feiner als G' $:\Leftrightarrow G' \subset G$ und $G \neq G'$.

Ein Filter auf X heißt Ultrafilter genau dann, wenn auf X kein Filter existiert, der echt feiner ist als G .

Beispiel: X Menge, $x \in X$.

$V := \{ U \subset X \mid x \in U \}$ ist ein Ultrafilter.

V heißt trivialer Ultrafilter.

4.7. Satz: X sei eine Menge.

Zu jedem Filter G auf X existiert ein Ultrafilter auf X , der feiner ist als G .

4.8. Satz: X ist eine Menge, $G!$ ein Filter auf X . $G!$ ist ein Ultrafilter $:\Leftrightarrow \forall A \subset X \ A \in G!$ oder $X \setminus A \in G!$

4.9. Definition: X sei ein topologischer Raum. $G!$ ein Filter auf X und $x, y \in X$.

(i) $G!$ heißt konvergent gegen x ($G! \rightarrow x$) $:\Leftrightarrow \forall V(x) \subset G!$.

(ii) y heißt Berührungspunkt von $G!$ $:\Leftrightarrow \forall U \in V(x) \ \forall F \in G! \ U \cap F \neq \emptyset$

Bemerkung: y heißt Berührungspunkt von $G!$ $:\Leftrightarrow \forall F \in G! : y \in \overline{F}$. Die Menge der Be-

rührungspunkte von $G!$ ist $\bigcap_{F \in G!} \overline{F}$.

Beispiele: (i) $G!$ Filter auf $G!$ in \mathbf{R} mit Basis $\{]0, \varepsilon[\mid \varepsilon > 0\}$, $G! \rightarrow 0$, denn für alle $\varepsilon > 0$ ist $] -\varepsilon, \varepsilon[\in G! \Rightarrow \forall V!(x) \subset G!$.

(ii) X topologischer Raum. $G! = \{F \subset X \mid A \subset F\}$ Filter auf X .

Die Menge der Berührungspunkte von $G!$ ist \overline{A} .

4.10. Definition: X, Y Mengen, $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $G!$ sei ein Filter auf X . Der Bildfilter von $G!$ unter f ist der von $\{f(F) \mid F \in G!\}$ erzeugte Filter. Er wird mit $f(G!)$ bezeichnet.

Bemerkung: $\{f(F) \mid F \in G!\}$ erfüllt (B1) und (B2). $f(G!) = \{U \subset Y \mid \exists F \in G! : f(F) \subset U\}$

Beziehung zwischen Konvergenz von Filtern und Folgen:

4.11. Definition: $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sei eine Folge in X . Der zu $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ gehörende Elementarfilter $F!$ ist definiert als der Bildfilter des Fréchet – Filters unter Abb. $\mathbf{N} \rightarrow X$ mit $x(n) = x_n$.

Es gilt: $F! := \{U \subset X \mid \exists F \subset \mathbf{N}: \mathbf{N} \setminus F \text{ endlich und } X(F) \subset U\}$
 $= \{U \subset X \mid \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0: X_n \in U\}$

4.12. Satz: X sei ein topologischer Raum. $x \in X$, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge in X und $F!$ der zugehörigen Elementarfilter. Dann gilt:

$(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert gegen $x \Leftrightarrow F! \rightarrow x$.

4.13. Satz: X sei ein topologischer Raum. $G!$ ein Filter auf X und $x \in X$. Dann gilt:
 X ist Berührungspunkt von $G! \Leftrightarrow$ es ex. ein Filter $F!$ auf X der feiner ist als $G!$ und gegen x konvergiert.

4.14. Satz: X, Y seien topologischer Raum. $A \subset X$ und $B \subset Y$. $f: X \rightarrow Y$ Abb.

(i) Für alle $a \in X$ und alle $A \subset X$ gilt:

$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists$ Filter auf X mit $A \in G!$ und $G! \rightarrow x$.

(ii) $f: X \rightarrow Y$ ist in $a \in X$ stetig \Leftrightarrow für jeden Filter $G!$ auf X mit $G! \rightarrow x$ gilt $f(G!) \rightarrow f(x)$.

4.15. Satz: X sei eine Menge. $(X_i)_{i \in J}$ eine Familie von topologischen Räumen, $(f_i)_{i \in J}$ eine Familie von Abb. $f_i: X \rightarrow X_i$. X trage die Initialtopologie bzgl. $(f_i)_{i \in J}$. $G!$ sei ein Filter auf X und $x \in X$. Dann gilt:

$G! \rightarrow x \Leftrightarrow \forall i \in J: f_i(G!) \rightarrow f_i(x)$.

4.16. Korollar: $(X_i)_{i \in J}$ sei eine Familie von nichtleeren topologischen Räumen.

$\prod_{i \in J} X_i$ sei das topologische Produkt und $p_k: \prod X_i \rightarrow X_k$ die kanonische Projektion und $G!$ sei ein Filter auf $\prod_{i \in J} X_i$. $x = (x_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} X_i$.

Dann gilt: $G! \rightarrow X \Leftrightarrow \forall i \in J p_i(G!) \rightarrow x_i$.

Andere Möglichkeit der Verallgemeinerung von Folgen

4.17. Definition: Eine gerichtete Menge ist ein Paar (D, \leq) bestehend aus einer Menge D und einer Relation „ \leq “ auf D mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall m, n, p \in D (m \leq n \text{ und } n \leq p) \Rightarrow m \leq p$.

(ii) $\forall m \in D m \leq m$

(iii) $\forall m, n \in D \exists p \in D m \leq p \text{ und } n \leq p$

Beispiele: (i) i. a. ist „ \leq “ keine Ordnung (d.h. $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ gilt nicht).

(ii) X topologischer Raum, $x \in X$, $(V!(x), \leq)$ mit $U, V \in V(x)$

$U \leq V \Leftrightarrow V \subset U$ ist eine gerichtete Menge.

4.18. Definition: (D, \leq) gerichtete Menge $a \in D$.

$E_a := \{x \in D \mid a \leq x\}$ heißt das zu a gehörige Endstück.

Bemerkung: $C = \{E_a \mid a \in D\}$ ist Basis eines Filters.

4.19. Definition:

(i) X sei eine Menge. Ein Netz oder eine Moore-Smith-Folge in X ist eine Abbildung $x: I \rightarrow X$, $i \mapsto x_i$, einer gerichteten Menge I in X .

(ii) X topologischer Raum, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X , $a \in X$.

$(x_i)_{i \in I}$ konvergiert gegen $a : \Leftrightarrow$ Der Filter auf X dessen Basis aus den Bildern der Endstücke von I besteht konvergiert gegen a .

Filter dessen Basis die Bilder der Endstücke von I sind, ist

$\{U \subset X \mid \text{es existiert ein } i_0 \in I \text{ mit } x_i \in U \text{ für alle } i \in I \text{ mit } i_0 \leq i\} = G$

(Stichwort: Koinzidenz des Folgenbegriffs aus dem Reellen)

Äquivalenz von Netzen und Filtern:

- (a) Zu jedem Netz $(x_i)_{i \in I}$ gehört der Filter, dessen Basis die Bilder der Endstücke sind.
- (b) G ein Filter auf X .
 $I := \{ (F, x) \mid F \in G \wedge x \in F \}$
 \leq auf I wird so definiert:
 $(F, x), (G, y) \in I, (F, x) \leq (G, y) \Leftrightarrow G \subset F$.
 (I, \leq) ist eine gerichtete Menge.
Die Moore-Smith-Folge $\Phi: I \rightarrow X$ wird definiert: $\Phi((F, x)) = x$.
Diesem Φ war nach (a) ein Filter zugeordnet, so daß Φ gegen a konvergiert genau dann, wenn dieser Filter gegen a konvergiert.

4.20. Satz: X sei ein topologischer Raum und $x \in X$.

Ein Filter auf X konvergiert gegen x genau dann, wenn das zugehörige Netz gegen x konvergiert.

§ 5 Trennungseigenschaften

5.1. Definition: X sei ein topologischer Raum.

X heißt T_0 -Raum $:\Leftrightarrow$ von je zwei verschiedenen Punkten aus X besitzt einer eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.

$$\forall x, y \in X \ x \neq y \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{V}(x) \ y \notin U) \text{ oder } (\exists U \in \mathcal{V}(y) \ x \notin U)$$

X heißt T_1 -Raum $:\Leftrightarrow$ von je zwei verschiedenen Punkten aus X besitzt jeder eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.

$$\forall x, y \in X \ x \neq y \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{V}(x) \ y \notin U) \text{ und } (\exists U \in \mathcal{V}(y) \ x \notin U)$$

X heißt T_2 -Raum $:\Leftrightarrow$ je zwei verschiedene Punkte aus X besitzen disjunkte Umgebungen.

$$\forall x, y \in X \ x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x) \ \exists V \in \mathcal{V}(y) \ U \cap V = \emptyset$$

X heißt T_3 -Raum $:\Leftrightarrow$ jede abgeschlossene Teilmenge A von X und jedes $x \in X \setminus A$ besitzen disjunkte Umgebungen.

$$\forall A \subset X \ \forall x \in X \setminus A \ (A = \bar{A} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} \ \exists U \in \mathcal{V}(x) \ A \subset V \text{ und } U \cap V = \emptyset)$$

X heißt T_4 -Raum $:\Leftrightarrow$ je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X besitzen disjunkte Umgebungen.

$$\forall A, B \subset X \ (A = \bar{A}, B = \bar{B}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{U} : A \subset U, B \subset V \text{ und } U \cap V = \emptyset)$$

Bemerkung: (i) $(T_2) \Rightarrow (T_1) \Rightarrow (T_0)$

(ii) Umkehrung $[(T_0) \Rightarrow (T_1)]$ gilt nicht!

(iii) Umkehrung $[(T_1) \Rightarrow (T_2)]$ gilt nicht!

(iv) T_3 impliziert keine der Eigenschaften T_0, T_1, T_2 .

Bemerkung: X topologischer Raum.

X ist T_1 -Raum \Leftrightarrow für alle $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen.

Bezeichnung: T_2 -Räume heißen auch Hausdorff-Räume.

5.2. Definition: X sei ein topologischer Raum.

- (i) X heißt regulär $\Leftrightarrow X$ ist T_1 -Raum und T_3 -Raum
- (ii) X heißt normal $\Leftrightarrow X$ ist T_1 -Raum und T_4 -Raum
- (iii) X heißt vollständig regulär $:\Leftrightarrow X$ ist T_1 -Raum und zu jeder abgeschlossenen Teilmenge A von X und jedem $x \in X \setminus A$ existiert eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0,1]$ mit $f(A) \subset \{0\}$ und $f(x)=1$.

Bemerkung: Es wird später gezeigt, daß aus „normal“ „vollständig regulär“ folgt.

Aus vollständig regulär folgt regulär.

Damit hat man die Folge von Implikationen

normal \Rightarrow vollständig regulär \Rightarrow regulär \Rightarrow hausdorffsch $\Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

Beispiel: Metrische Räume sind normal.

5.3. Satz: (X,d) sei ein metrischer Raum.

Dann gilt

- (i) X ist hausdorffsch
- (ii) Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A und B von X existiert eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0,1]$ mit $f(A) \subset \{0\}$ und $f(B) \subset \{1\}$

Bemerkung: Daraus folgt, daß jeder metrische Raum normal ist.

5.4. Satz: Für jeden topologischen Raum X sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i) X ist hausdorffsch
- (ii) $\forall x,y \in X (x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x) \ y \notin \bar{U})$
- (iii) $\forall x \in X \ \{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(x)} \bar{U}$
- (iv) $\Delta = \{ (x,x) \mid x \in X \} \subset X \times X$ ist abgeschlossen
- (v) Jeder konvergente Filter auf X besitzt genau einen Limes.

5.5. Satz: (i) Das Bild eines Hausdorffraumes unter einer abgeschlossenen ist hausdorffsch.

(ii) Jeder Unterraum eines Hausdorffraumes ist hausdorffsch.

(iii) $(X_i)_{i \in J}$ sei eine Familie von nichtleeren topologischen Räumen,

$\prod_{i \in J} X_i$ das topologische Produkt.

$\prod_{i \in J} X_i$ ist hausdorffsch $\Leftrightarrow \forall \lambda \in J \ X_\lambda$ ist hausdorffsch.

5.7. Satz: X sei ein topologischer Raum, R eine Äquivalenzrelation auf X . X/R sei der Quotientenraum von X nach R und $p: X \rightarrow X/R$ die kanonische Projektion.

(i) Wenn X/R hausdorffsch ist, dann ist R abgeschlossen in $X \times X$.

(ii) Wenn R abgeschlossen ist in $X \times X$ und p offen, dann ist X/R abgeschl.

Reguläre Räume

5.8. Satz: Für jeden topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist T_3 Raum

(ii) $\forall x \in X \ \forall U \in \mathcal{V}(x) \ \exists V \in \mathcal{V}(x) : V \subset \bar{V} \subset U$

(iii) Zu jeder abgeschlossenen Teilmengen A von X und jedem $x \in X \setminus A$ ein $V \in \mathcal{V}(x)$ mit $\bar{V} \cap A = \emptyset$.

5.9. Satz: (i) Jeder Unterraum eines (vollständig) regulären Raumes ist (vollständig) regulär.

(ii) $(X_i)_{i \in J}$ sei eine nichtleere Familie von nichtleeren topologischen Räumen

und $X := \prod_{i \in J} X_i$, sei das topologische Produkt. Dann gilt

X regulär (vollst. regulär) $\Leftrightarrow \forall i \in J: X_i$ regulär (vollständig regulär)

5.10. Satz: Es seien X ein topologischer Raum, R eine Äquivalenzrelation auf X und $p: X \rightarrow X/R$ die kanonische Projektion auf den Quotientenraum X/R .

Wenn X regulär ist und p offen und abgeschlossen ist, dann ist X/R hausdorffsch.

Bezeichnungen: Y topologischer Raum, $I := [0,1]$

$$I^Y := \{ f: Y \rightarrow I \mid f \text{ stetig} \}, I_f = I, (I_f)_{f \in I^Y}.$$

$$Q^Y := \prod_{f \in I^Y} I_f \text{ topologisches Produkt der } (I_f)_{f \in I^Y}.$$

Lemma: $p: X \rightarrow Y$ sei eine abgeschlossene Abbildung, $S \subset Y$ sei abgeschlossen und $V \subset X$ offen mit $p^{-1}(S) \subset V$.

Dann existiert eine offene Teilmenge W von Y mit $S \subset W$ und $p^{-1}(W) \subset V$.

Bemerkung: Ein zu 5.9. analoger Satz gilt nicht für „normal“.

Beispiel: z.B. in Dugundji.

5.11. Satz: X sei ein vollständig regulärer topologischer Raum.

Dann existiert eine Einbettung ρ von X in Q^X , d.h. $\rho: X \rightarrow Q^X$ aufgefaßt als Abbildung von X auf $\rho(X)$ ist ein Homöomorphismus.

§6 Normale Räume:

(Zur Erinnerung: T_4 -Raum: disjunkte abgeschlossene Mengen, lassen sich durch disjunkte offene Umgebungen trennen.)

6.1. Satz: Für alle topologischen Räume X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist T_4 -Raum

(ii) Für alle abgeschlossenen Teilmengen A von X und jede offene Umgebung U von A existiert eine offene Umgebung V von A mit $\bar{V} \subset U$.

6.2. Satz (Lemma von Urysohn („Paul (1898-1924)“))

Für jeden topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent

(i) X ist T_4 -Raum

(ii) Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, B von X existiert eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow [0,1]$, so daß gilt:

$$\forall a \in A \quad f(a) = 0 \quad \wedge \quad \forall b \in B \quad f(b) = 1.$$

Bezeichnung: Ein solches f heißt Urysohn – Fkt.

6.3. Satz: (Tietzcher Fortsetzungssatz):

Für jeden topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist T_4 Raum

(ii) Jede auf einer abgeschlossenen Teilmenge A von X definierte stetige Fkt. $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ läßt sich fortsetzen zu einer stetigen Fkt. $F: X \rightarrow \mathbf{R}$, d.h. es ex. eine stetige Fkt.: $F: X \rightarrow \mathbf{R}$ mit $F|_A = f$.

Beweis: Vorbemerkung: \mathbf{R} ist homöomorph zu $] -1, 1[$.

6.4. Hilfssatz: $f: A \rightarrow [-1,1]$ sei eine stetige Abb.

Dann es. eine Folge $g_n: X \rightarrow [-1,1]$ von stetigen Abbildungen ($n = 0, 1, \dots$)

mit folgenden Eigenschaften:

$$(a) \forall n \in \mathbf{N}_0 \forall x \in X: -1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq g_n(x) \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(b) \forall n \in \mathbf{N}_0 \forall x \in A: |f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(c) \forall n \in \mathbf{N}_0 \forall x \in X: |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(d) \forall m, n, p \in \mathbf{N}_0 (m, n \geq p \Rightarrow \forall x \in X: |g_m(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p)$$

6.5. Hilfssatz: Jede stetige Fkt. $f: A \rightarrow [-1, 1[$ läßt sich in eine stetige Fkt. $F: X \rightarrow]-1, 1[$ fortsetzen.

Lokalendliche Systeme und Zerlegung der Eins

6.6. Definition: X sei ein topologischer Raum.

Eine Familie $V = (U_i)_{i \in I}$ von Teilmengen U_i von X heißt eine Überdeckung von X genau dann, wenn $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Eine Überdeckung $V = (U_i)_{i \in I}$ von X heißt offene Überdeckung
 $\Leftrightarrow \forall i \in I U_i$ offen.

Eine Überdeckung $V = (U_i)_{i \in I}$ heißt endlich (abzählbar)
 $\Leftrightarrow I$ ist endlich (abzählbar).

6.7. Definition: X topologischer Raum.

Eine Familie $B = (A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen A_i von X heißt lokalendlich
 \Leftrightarrow zu jedem $x \in X$ existiert ein $U \in V(x)$, so daß $U \cap A_i \neq \emptyset$ ist für höchstens endlich viele $i \in I$.

B heißt punktfremd \Leftrightarrow jedes $x \in X$ liegt in höchstens endlich vielen A_i .

6.8. Satz: X sei ein normaler topologischer Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge von X . $V = (U_i)_{i \in I}$ sei eine Familie von offenen Teilmengen von X mit $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ und V sei punktfremd.

Dann existiert eine Familie $W = (V_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen von X mit $A \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ und $\overline{V_i} \subset U_i$ für alle $i \in I$.

6.9. Satz: X topologischer Raum, $B = (A_i)_{i \in I}$ eine lokalendliche Familie von Teilmengen von X .

Dann ist $\overline{B} = (\overline{A_i})_{i \in I}$ lokalendlich und $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.

6.10. Definition: X topologischer Raum, $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ stetig.

Die Menge $\overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$ heißt der Träger von f .

Bezeichnung: $\text{Tr}f$ ($\text{supp}(f)$).

Bemerkung: $(f_i)_{i \in I}$ Familie von stetigen Funktionen $f_i: X \rightarrow \mathbf{R}$, so daß $(\text{Tr}f_i)_{i \in I}$ lokalendlich ist, dann ist $\sum_{i \in I} f_i(x)$ eine stetige Funktion.

6.11. Definition: X topologischer Raum, $V = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X .

Eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ von stetigen Funktionen $f_i: X \rightarrow \mathbf{R}$ heißt ein V untergeordnete Zerlegung der Eins, wenn gilt:

- (i) $\forall i \in I \forall x \in X f_i(x) \geq 0$
- (ii) $\forall i \in I \text{Tr}f_i \subset U_i$
- (iii) $(\text{Tr}f_i)_{i \in I}$ ist lokalendlich
- (iv) $\forall x \in X \sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.

6.12. Satz: Wenn X normal ist, dann existiert zu jeder lokalendlichen offenen Überdeckung $V = (U_i)_{i \in I}$ eine V untergeordnete Zerlegung der Eins.

Definition: Eine n -dimensionale topologische Manigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X , der hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie besitzt und n -dimensional lokal euklidisch ist, d.h. jedes $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge von \mathbf{R}^n .

§ 7 Kompakte Räume

7.1. Definition: X topologische Räume.

X heißt quasikomakt : \Leftrightarrow jede offene Überdeckung von X enthält eine endliche Überdeckung

(Zu jeder Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen von X mit

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X \text{ existiert eine endliche Teilmengen } J \subset I \text{ mit } \bigcup_{i \in J} U_i = X)$$

X heißt kompakt : $\Leftrightarrow X$ ist quasikomakt und hausdorffsch.

(Hier gehen die Definitionen auseinander !)

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt quasikomakt (kompakt) \Leftrightarrow der Unterraum A ist quasikomakt (kompakt)

7.2. Satz: Für jeden topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) X ist quasikomakt
- (ii) Zu einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset \text{ existiert eine endliche Teilmenge } K \subset I \text{ mit } \bigcap_{i \in K} A_i = \emptyset$$

- (iii) Jeder Filter auf X besitzt einen Berührungspunkt
- (iv) Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.

7.3. Satz: In einem quasikompakten Raum X besitzt jede Folge einen Häufungspunkt.

7.4. Satz: Jede abgeschlossene Teilmenge eines quasikompakten Raumes ist quasikomakt.

7.5. Satz: X sei ein Hausdorff-Raum und $A \subset X$ sei kompakte Teilmenge.

Dann existieren zu jedem $x \in X \setminus A$ offene Umgebung U von x und V von A , so daß $U \cap V = \emptyset$. Insbesondere ist A abgeschlossen.

7.6. Satz: X ist kompakter topologischer Raum, $A \subset X$. A ist kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen ist.

7.7. Korollar: Jeder kompakte Raum ist regulär.

7.8. Satz: Jeder kompakte Raum ist normal.

7.9. Satz: X sei ein topologischer Raum und \mathcal{T} sei eine Subbasis der Topologie von X .

Vorbemerkung: 1. $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \neq X$

2. $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$

Beispiel: $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Topologie auf $[a, b]$ hat als Subbasis die Menge

$\mathcal{T} := \{[a, c[\mid c \in]a, b[\} \cup \{]c, b] \mid c \in]a, b[\}$

Behauptung: $[a, b]$ ist kompakt

7.10. Satz: X, Y topologische Räume. $f: X \rightarrow Y$ stetig. Wenn X quasikompakt ist, dann ist $f(X)$ quasikompakt.

7.11. Satz: Jede stetige reellwertige Funktion auf einem quasikompakten Raum nimmt Maximum und Minimum an.

7.12. Korollar: X sei quasikompakt, Y hausdorffsch, $f: X \rightarrow Y$ stetig.

Dann ist f abgeschlossen.

Wenn f surjektiv ist, dann ist f identifizierend.

Wenn f bijektiv ist, dann ist f ein Homöomorphismus.

7.13. Satz (von Tychonoff (*1906))

$(X_i)_{i \in I}$ Familie von nichtleeren topologischen Räumen, $X = \prod_{i \in I} X_i$ sei das topologische Produkt.

X ist quasikompakt $\Leftrightarrow \forall i \in I X_i$ quasikompakt

7.14. Satz (von Borel-Heine): $A \subset \mathbf{R}^n$

A kompakt $\Leftrightarrow A$ ist beschränkt und abgeschlossen

Bemerkung: Beachte: Die durch die euklidische Norm auf \mathbf{R}^n definierte Topologie ist gleich der Produkttopologie auf \mathbf{R}^n .

7.15. Definition: Eine topologische Gruppe ist ein topologischer Raum G , der gleichzeitig die Struktur einer Gruppe trägt, so daß gilt:

(i) Die Verknüpfung $G \times G \rightarrow G$

$(a, b) \mapsto a \cdot b$ ist stetig.

(ii) Die Inversenbildung $i: G \rightarrow G$

$i(g) = g^{-1}$ ist stetig.

Beispiel:

1. $(\mathbf{R}^n, +)$ ist eine topologische Gruppe.

2. (G, \cdot) Gruppe.

Wenn man G mit der diskreten Topologie versteht, dann ist G eine topologische Gruppe.

3. $S^1 = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z|=1 \} \subset \mathbf{C}$ ist mit der Multiplikation in \mathbf{C} eine topologische Gruppe.

4. $S^3 = \{ h \in \mathbf{H} \mid |h|=1 \}$ ist mit der Multiplikation von Quaternionen eine topologische Gruppe.

5. $GL(n, \mathbf{R}), GL(n, \mathbf{C}), O(n), U(n)$ sind topologische Gruppen mit der Matrixmultiplikation.

Topologie: $GL(n, \mathbf{R}) \subset M(n \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2}$

Damit erhält man eine Topologie auf den oben genannten Gruppen.

$O(n)$ und $U(n)$ sind kompakte topologische Gruppen.

7.16. Satz: Es seien X ein topologischer Raum, G eine topologische Gruppe und

$\alpha: G \times X \rightarrow X$ eine stetige Gruppenaktion.

Wenn X und G kompakt sind, dann ist X/G ein Hausdorff-Raum.

Beispiel: $O(n+1) \supset O(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in O(n) \right\}$

$O(n)$ operiert auf $O(n+1)$ von Rechts

$O(n+1) \times O(n) \rightarrow O(n+1)$

$(A, B) \mapsto AB$

$O(n+1)/O(n)$ ist homöomorph zu S^n .

$O(n+1)/O(n)$ ist quasikompakt.

Kompakte metrische Räume

7.17. Definition: (X, d) sei metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X .

(i) (x_n) heißt Cauchy-Folge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 \ d(x_m, x_n) < \varepsilon$

(ii) (X, d) heißt vollständig \Leftrightarrow jede Cauchy-Folge in X ist konvergent.

7.18. Definition: (X, d) sei ein metrischer Raum.

(i) Für alle $A \subset X$ ist der Durchschnitt $D(A)$ von A definiert als

$$D(A) := \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in A \},$$

wenn dieses Supremum existiert.

Falls es nicht existiert, sei $D(A) = \infty$.

(ii) X heißt präkompakt $:\Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Überdeckung von X mit Mengen von Durchmesser $\leq \varepsilon$.

7.19. Satz: Für jeden metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist kompakt

(ii) Jede Folge in X besitzt einen Häufungspunkt.

(iii) X ist vollständig und präkompakt.

7.20. Satz: (Lemma von Lebesgue) (X, d) sei ein kompakter metrischer Raum und

$V = (U_i)_{i \in I}$ sei eine offene Überdeckung von X . Dann ex. ein $\varepsilon > 0$, so daß zu jeder Teilmenge $A \subset X$ mit $D(A) < \varepsilon$ ein $i \in I$ ex. mit $A \subset U_i$. Jedes ε mit dieser Eigenschaft heißt Lebesguesche Zahl der Überdeckung V .

7.21. Satz: (X, d) , (Y, e) seien metrische Überdeckungen, $f: X \rightarrow Y$ stetige Abb.

Wenn X kompakt ist, dann ist f gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X \ d(x, y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Lokalkompakte Räume:

7.22 Definition: Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt genau dann, wenn X hausdorffsch ist und jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

7.23 Satz: Für jeden lokalkompakten Raum X gelten folgende Aussagen:

i) Jedes $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis, die aus kompakten Umgebungen von x besteht.

ii) X ist regulär.

7.24. Satz: X, Y seien topologische Räume $f: X \rightarrow Y$ sei eine identifizierende Abbildung, d.h. Y besitzt die Identifizierungstopologie bzgl. f . Wenn A ein lokalkomp. Raum ist, dann ist $h := f \times \text{Id}_A: X \times A \rightarrow Y \times A$ identifizierend.

Beispiele

Anwendungen auf topologische Vektorräume

7.25. Definition: Ein topologischer Vektorraum ist ein \mathbf{R} – Vektorraum V zusammen mit einer Hausdorff – Topologie auf V , so daß die Abbildungen

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V \\ (x,y) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times V &\rightarrow V \\ (\lambda,x) &\rightarrow \lambda \cdot x \end{aligned}$$

stetig sind. \mathbf{R} trägt die Standardtopologie $(|\cdot|)$.

Beispiele (1) \mathbf{R}^n

(2) Jeder normierte \mathbf{R} – Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum.
 $(V, \|\cdot\|)$ sei ein normierter Vektorraum.

7.26 Satz (von Tychonoff): Jeder n – dim. ($n \in \mathbf{N}$) Untervektorraum V eines topologischen Vektorraumes W ist topologisch isomorph zu \mathbf{R}^n (d.h. es gibt einen Vektorraumisomorphismus $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow V$, der ein Homöomorphismus ist).

7.27 Satz: Jeder Vektorraum – Isomorphismus zwischen endlichdim. topologischen Vektorräumen ist ein Homöomorphismus.

7.28 Definition: Es sei V ein \mathbf{R} – Vektorraum, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ seien Normen auf V . $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen äquivalent : \Leftrightarrow es gibt $\alpha, \beta > 0$, so daß $\forall x \in V$:
 $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$.

7.29 Satz: Äquivalente Normen auf einem \mathbf{R} Vektorraum definieren die gleiche Topologie.

7.30 Satz: Auf jedem endlichdim. \mathbf{R} – Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.

7.31 Satz: Jeder endlichdim. Untervektorraum V eines normierten \mathbf{R} – Vektorraum $(W, \|\cdot\|)$ ist abgeschlossen in W .

7.32 Satz: (von F. Riesz) Ein normierter \mathbf{R} -Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist genau dann lokal kompakt, wenn V endlichdim. ist.

Parakompakte Räume

7.33 Definition:

(i) $\mathcal{B} = (A_i)_{i \in I}$, $\mathcal{C} = (B_k)_{k \in K}$ seien Familien von Teilmengen einer Menge X . \mathcal{B} heißt Verfeinerung von \mathcal{C} : $\Leftrightarrow \forall i \in I \exists k \in K A_i \subset B_k$.

(ii) Ein Hausdorff – Raum heißt parakompakt genau dann, wenn zu jeder offenen Überdeckung \mathcal{V} von X eine Überdeckung \mathcal{W} von X existiert, so daß \mathcal{V} lokalendlich und Verfeinerung von \mathcal{W} ist.

7.34 Satz: Jeder parakompakte Raum ist normal.

7.35 Satz: Wenn X ein parakompakter Raum ist, dann ist zu jeder offenen Überdeckung \mathcal{V} von X eine \mathcal{V} untergeordnete Zerlegung der Eins.

7.36 Satz (von Stone):

Jeder metrische Raum ist parakompakt

7.37 Satz: Jeder lokalkompakte Raum mit einer abzählbaren Basis der Topologie ist parakompakt.

§ 8 Die Vervollständigung von metrischen Räumen:

8.1 Definition: (X, d) sei ein metrischer Raum. Eine Vervollständigung von (X, d) ist ein vollständiger metrischer Raum (X^*, d^*) , so daß X homöomorph ist zu einer dichten Teilmenge von X^* unter einer Isometrie.

(D.h. Es ex. eine Abbildung $h: X \rightarrow X^*$, so daß $\overline{h(X)} = X^*$ und $d(x,y) = d^*(h(x),h(y))$ für alle $x, y \in X$).

8.2 Satz: Sind (X^*, d^*) und (X^\wedge, d^\wedge) Vervollständigungen des metrischen Raumes (X, d) , dann sind X^* und X^\wedge zueinander homöomorph unter einer Isometrie.

8.3 Satz: Zu jedem metrischen Raum (X, d) existiert eine Vervollständigung.

§ 9 Der Satz von Stone – Weierstraß:

X sei ein topologischer Raum, $C(X) := \{f: X \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ stetig}\}$

In $C(X)$ wird $+$, $*$ und Multiplikation mit reellen Zahlen definiert. Seien $f, g \in C(X)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Das $C(X)$ ist eine Algebra über \mathbf{R} .

$X := \mathbf{R}$.

Die von $\{1, x\}$ erzeugte \mathbf{R} – Algebra ist die Algebra der Polynomfunktionen auf \mathbf{R} .

9.1 Definition: X sei kompakt. Auf $C(X)$ wird eine Norm definiert durch

$$\|f\| := \sup\{f(x) \mid x \in X\}.$$

Die zugehörige Metrik ist $d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$

Die zugehörige Topologie auf $C(X)$ heißt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Bemerkungen: 1. Für jedes $f \in C(X)$ nimmt $|f|$ auf X sein Max. an.

2. $(C, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum (ein vollst. norm. Raum!)

3. $A \subset C(X)$.

A ist dicht in $C(X)$ bzgl. der Topologie der glm. Konvergenz

: \Leftrightarrow Zu $f \in C(X)$ und jedem $\varepsilon > 0$ ex. eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in A , so daß $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

9.2. Hilfssatz: Es gibt eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von Polynomfunktionen auf \mathbf{R} mit $p_n(0)=0$ für alle $n \in \mathbf{N}$, die auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $t \rightarrow \sqrt{t}$ konvergiert.

9.3 Hilfssatz: Es sei $a > 0$. Es gibt eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von Polynomfunktionen, die auf $[-a,a]$ gleichmäßig gegen $|\cdot|: [-a,a] \rightarrow \mathbf{R}$, $t \rightarrow |t|$ und $p_n(0) = 0 \forall n \in \mathbf{N}_0$.

X kompakter Raum, $C(X)$, $D \subset C(X)$.

Spann(D) = der von D erzeugte Unterraum

= endl. Linearkomb. von Elementen aus D mit Koeff. in \mathbf{R} .

$A(D)$ bezeichnet die von D erzeugte Unter algebra von $C(X)$, das ist die kleinste Unter algebra von $C(X)$, die D enthält. Die Elemente aus $A(D)$ haben die Form:

$$\sum_{0 \leq v_1 < \dots < v_s \leq s} a_{v_1, \dots, v_s} x_1^{v_1} \dots x_s^{v_s} \quad a_i \in \mathbf{R}, x_i \in D, a_{0, \dots, 0} \neq 0, s \in \mathbf{N}.$$

9.4. Hilfssatz: X kompakter Raum, A sei abgeschlossene Unter algebra von $C(X)$, $f, g \in A$, $|f|$, $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ Elemente von A .

9.5. Hilfssatz: X kompakter Raum. Wenn A eine Unter algebra von $C(X)$ ist, dann ist \overline{A} eine Unter algebra von $C(X)$.

9.6. Satz von Stone Weierstraß: X sei komp. Raum. $D \subset C(X)$, und $A(D)$ die von D erzeugte Unter algebra. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $\overline{A(D)} = C(X)$

ii) D hat folgende Eigenschaften:

a) $\forall x \in X \exists f_x \in D \quad f_x(x) \neq 0$ und

b) $\forall x, y \in X (x \neq y \Rightarrow \exists f \in D: f(x) \neq f(y)).$

9.7 Korollar (Satz von Weierstraß):

Es seien $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Jede stetige Funktion auf $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ex. eine Polynomfunktion $p_\varepsilon: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, so daß

$$|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Einschub: \mathbf{R} – Algebra $(A, +, *, \cdot)$

$+, *: A \times A \rightarrow A$ $(A, +, *)$ komm. Ring

$\cdot: \mathbf{R} \times A \rightarrow A$ $(A, +, \cdot)$ \mathbf{R} – Vektorraum.

9.8. Korollar: $A \subset \mathbf{R}^n$ sei kompakt und $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ stetig. Dann ex. zu jedem $\varepsilon > 0$ ein

$p_\varepsilon \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$, so daß für alle $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ gilt:

$$|p_\varepsilon(a_1, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)| < \varepsilon.$$

9.9. Satz: X sei ein kompakter Raum, A eine \mathbf{C} – Unter algebra von $C_C(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $\overline{A} = C_C(X)$

ii) A erfüllt die Voraussetzungen (a), (b) aus dem Satz von Stone – Weierstraß und für alle $f \in A$ ist $\bar{f} \in \overline{A}$.

9.10. Satz: Die trigonometrische Polynome $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n e^{inx}$ mit $c_n \in \mathbf{C}$ und $c_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbf{Z}$ liegen dicht im Raum der stetigen 2π - Periodischen Funktionen von \mathbf{R} in \mathbf{C} .

Warnung: 9.10 sagt, daß jedes $f \in C_C^{2\pi}(\mathbf{R})$ durch trigonometrische Polynome gleichmäßig approximiert.

9.10 sagt nicht, daß die Fourier – Reihe von f , daß ist eine spezielle Folge von trigonometrischen Polynomen, gleichmäßig gegen f konvergiert.

§ 10 Funktionenräume:

X, Y topologische Räume, $Y^X = \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$, $\{f: X \rightarrow Y\} = \prod_{x \in X} Y_x$ mit $Y_x = Y$.

wo $\prod_{x \in X} Y_x$ mit der Produkttopologie versehen ist.

10.1 Definition: X, Y seien topologische Räume. $C(X, Y) := \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$.

Für jedes $A \subset X$ und $W \subset Y$ sei $(A, W) := \{f \in C(X, Y) \mid f(A) \subset W\}$

i) Die Topologie der punktweisen Konvergenz, das ist die Teilraumtopologie von $C(X, Y)$ in dem topologischen Produkt:

$$\prod_{x \in X} Y_x \quad \text{mit } Y_x = Y \text{ für alle } x \in X.$$

$C(X, Y)$ zusammen mit dieser Topologie wird mit $C_p(X, Y)$ bezeichnet.

ii) Die Kompakt – offene Topologie: Das ist die Topologie auf $C(X, Y)$, die als Subbasis die Mengen (A, U) mit $A \subset X$ und A quasikompakt und $U \subset Y$ und U offen hat.

$C(X, Y)$ versehen mit dieser Kompakt – offenen Topologie wird mit $C_k(X, Y)$ bezeichnet.

Bemerkung: Die Topologie der punktweisen Konvergenz trägt den Namen zurecht!

Beispiele:

$$i) \bigcap_{i \in I} (A_i, W) = \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right), W \right)$$

$$ii) \bigcap_{i \in I} (A, W_i) = \left(A, \left(\bigcap_{i \in I} W_i \right) \right)$$

$$iii) \bigcap_{i \in I} (A_i, W_i) \subset \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right), \left(\bigcup_{i \in I} W_i \right) \right)$$

$$iv) \overline{(A, W)} \subset (A, \overline{W})$$

10.2 Satz: X, Y topologische Räume

i) Die Abb.: $j: Y \rightarrow C_k(X, Y)$ mit $j(y) = c_y \quad \forall y \in Y$ ist eine Einbettung von Y in $C_k(X, Y)$ (d.h. j ist ein Homöomorphismus von Y auf das Bild unter j).

ii) $Y_0 \subset Y$. Dann ist $C_k(X, Y_0)$ homöomorph zu $S_0 := \{f \in C_k(X, Y) \mid f(X) \subset Y_0\} \subset C_k(X, Y)$

Bemerkung: Entsprechende Sätze gelten für die Topologie der punktweisen Konvergenz.

10.3 Satz: Es seien X, Y topologische Räume. Die kompakt offene Topologie auf $C(X, Y)$ ist feiner als die Topologie der punktweisen Konvergenz.

10.4. Satz: X, Y topologische Räume

i) $C_k(X, Y)$ hausdorffsch $\Leftrightarrow Y$ hausdorffsch

ii) $C_k(X, Y)$ regulär $\Leftrightarrow Y$ regulär

Bezeichnung: X, Y, Z topologische Räume.

$T: C_k(X, Y) \times C_k(Y, Z) \rightarrow C_k(X, Z)$

$$T(f, g) = g \circ f.$$

10.5. Satz: T stetig in jedem Argument, d.h.

i) Wenn $f_1 \in C_k(X, Y)$, dann ist die Abbildung $C_k(Y, Z) \rightarrow C_k(X, Z)$
 $g \rightarrow g \circ f_1$ stetig

ii) Wenn $g_1 \in C_k(Y, Z)$, dann ist die Abbildung $C_k(X, Y) \rightarrow C_k(X, Z)$
 $f \rightarrow f \circ g_1$ stetig.

10.6. Satz: X, Y, Z topologische Räume. Wenn Y lokalkompakt ist, dann ist

$T: C_k(X, Y) \times C_k(Y, Z) \rightarrow C_k(X, Z)$

stetig.

Bezeichnung: Y, Z seien topologische Räume. Die Abbildung

$e: Y \times C_k(Y, Z) \rightarrow Z$

mit $e(y, f) = f(y)$ heißt Auswertungsabbildung (engl. evaluation map)

10.7. Satz: Y, Z topologische Räume

i) Für alle $y \in Y$ ist die Abbildung $e_y: C_k(Y, Z) \rightarrow Z$
 $e_y(f) = f(y)$.

ii) Wenn Y lokalkompakt ist, dann ist

$e: Y \times C_k(Y, Z) \rightarrow Z$

stetig.

Bezeichnung: X, Y, Z topologische Räume.

$f: X \times Y \rightarrow Z$ stetig.

$\hat{f}: X \in C_k(Y, Z)$ wird definiert durch

$$\hat{f}(x)(y) = f(x,y).$$

$$\hat{f}(x): Y \rightarrow Z \text{ stetig}$$

10.8. Satz: X, Y, Z seien topologische Räume.

i) Wenn $f: X \times Y \rightarrow Z$ stetig ist, dann ist $\hat{f}: X \rightarrow C_k(Y,Z)$ stetig.

ii) Wenn $\hat{f}: X \rightarrow C_k(Y,Z)$ stetig ist und Y lokalkompakt ist, dann ist $f: X \times Y \rightarrow Z$ stetig.

Bezeichnung: X sei quasikompakt, (Y, d) metrischer Raum in $C(X,Y)$ wird eine Metrik $\tilde{d}(f,g) := \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ für alle $f, g \in (K, Y)$. $C_d(X,Y)$ bezeichnet $C(X, Y)$ zusammen mit der von \tilde{d} definierten metrischen Topologie.

10.9. Satz: Wenn X quasikompakt ist und (Y, d) ein metrischer Raum ist, dann ist $C_d(X, Y) = C_k(X, Y)$.

Bezeichnung: X, Y topologische Räume, $K \subset X$, K quasikompakt.

$$p_k: C(X,Y) \rightarrow C_k(K,Y) \quad p_k(f) := f|_K.$$

10.10. Definition: Die Initialtopologie auf $C(X,Y)$ bzgl. der Familie

$(p_k)_{K \text{ quasikomp. Teilmenge von } X}$ heißt Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz. $C(X,Y)$ ausgestattet mit der Topologie der komp. gleichmäßigen Konvergenz wird mit $C_L(X,Y)$ bezeichnet.

10.11. Satz: X, Y seien topologische Räume. Dann ist $C_k(X,Y) = C_L(X,Y)$.

Bemerkung: (Y, d) metr. Raum

0. $C_k(K, Y) = C_d(K, Y)$ für alle $K \subset X$ quasikompakt

1. $(f_i)_{i \in I}$ sei eine Folge in $C_L(X, Y)$, die gegen f konvergiert, d.h. zu jeder Umgebung U von f ex. ein i_0 , so daß für alle $i_0 \leq i$ gilt: $f_i \in U$.
 \Rightarrow für alle quasikompakten Teilmengen K von X konvergiert (f_i) auf K gleichmäßig gegen f .

Gleichgradige Stetigkeit und der Satz von Arzela – Ascoli:

Bezeichnung: X, Y topologische Räume, $F(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y\} = \prod_{x \in X} Y_x$.

10.12. Definition: X topologischer Raum, (Y, d) metr. Raum, $H \subset F(X, Y)$.

(i) $x \in X$, H heißt in X gleichgradig stetig

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U_x \in \mathcal{V}(x) \forall f \in H \ f(U_x) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

(ii) H heißt gleichgradig stetig $:\Leftrightarrow$ für alle $x \in X$ ist in x gleichgradig stetig.

Bemerkung: Wenn H gleichgradig stetig ist, dann ist $H \subset C(X, Y)$.

Beispiele: 1. $(X,d), (Y,e)$ metrische Räume:

$$k, \alpha > 0: H := \{f: X \rightarrow Y \mid \forall x, y \in X: e(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)^\alpha\}$$

2. $k, a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ und $k > 0$.

$$H := \{f \in C^1([a, b], \mathbf{R}) \mid |f'(x)| \leq k \ \forall x \in [a, b]\}$$

10.13. Satz: Es seien X ein topologischer Raum (Y, d) ein metrischer Raum. Wenn

$H \subset C(X, Y)$ gleichgradig stetig ist, dann stimmen auf H die kompakt offene Topologie und die Topologie der punktweisen Konvergenz überein.

10.14. Satz: X topologischer Raum, (Y, d) metrischer Raum, $x \in X$ und $H \subset F(X, Y)$.

Wenn H in x gleichgradig stetig ist, dann ist die abgeschlossene Hülle \overline{H} von H in der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $F(X, Y)$ ebenfalls gleichgradig stetig.

10.15. Korollar: X topologischer Raum, (Y, d) metrischer Raum, $(f_i: X \rightarrow Y)_{i \in \mathbb{N}}$ sei eine gleichgradig stetige Folge von Abbildung. Wenn $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung ist, so daß $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x)$, dann ist f stetig.

10.16. Satz (von Arzela – Ascoli)

X sei ein lokalkompakter topologischer Raum, (Y, d) metrischer Raum, $H \subset C(X, Y)$. H relativ kompakt in $C_k(X, Y)$ (abgeschlossene Hülle ist kompakt) genau dann, wenn H gleichgradig stetig ist ein für alle $x \in X$ die Teilmenge $H(x) = \{f(x) \mid f \in H\}$ von Y relativ kompakt ist.

10.17. Korollar: X sei ein kompakter Raum, H eine Teilmenge von $C(X)$. Dann gilt: H ist relativ kompakt genau dann, wenn H gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt ist.
(H gleichmäßig beschränkt: $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbf{R} \forall f \in H \forall x \in X |f(x)| \leq A$.)

Formulierung in Funktionen Theorie (von Fischer Lieb)

Sei $M \subset \mathbf{R}^n$, M kompakt, $(f_v)_{v \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte und gleichgradige stetige Folge von Funktionen auf M , dann existiert eine auf M gleichmäßig konvergente Teilfolge.

M kompakt, $C(M)$, d.h. $(f_v)_{v \in \mathbb{N}} \Rightarrow \overline{(f_v)_{v \in \mathbb{N}}}$ kompakt in $C(M)$. \Rightarrow es gibt in $(f_v)_{v \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge in der Topologie der glm. Konvergenz.

10.18 Satz (von Peano): $f: [0,1] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ stetig und beschränkt. Dann gibt es wenigstens ein $y \in C^1([0,1])$ mit $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in [0,1]$ und $y_0 = y(0)$. (Anfangswertproblem)

§ 11 Überlagerungsabbildungen:

11.1 Definition: Eine stetige Abbildung $p: X \rightarrow B$ zwischen topologischen Räumen X und B heißt eine Überlagerungsabbildung genau dann, wenn zu jedem $x \in B$ eine offene Umgebung U von x ex., so daß $p^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$ eine nicht-leere disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen U_i von X ist und für jedes $i \in I$ die Einschränkung $p|_{U_i}: U_i \rightarrow U$ ein Homöomorphismus von U_i auf U ist.

Bemerkungen: (i) p ist surjektiv
(ii) p ist eine offene Abbildung
(iii) $\forall x \in B$ ist $p^{-1}(x)$ diskret.

Beispiele: 1. $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ ist definiert durch $p(x) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix} \forall x \in \mathbf{R}$. Dies ist eine Überlagerungsabbildung.

2. Jeder Homöomorphismus ist eine Überlagerungsabbildung

3. X topologischer Raum, D diskreter Raum

Jede Überlagerungsabbildung sieht lokal so aus

4. $p: S^1 \rightarrow S^1$, $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ mit $p(z) = z^n$ ist eine Überlagerungsabb.

5. $p: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $p(z) = e^z$ ist eine Überlagerungsabb.

6. $p: \mathbf{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}, z \rightarrow z^n$ Überlagerungsabb.

7. $p_n: S^n \rightarrow \mathbf{RP}^n, p_n(x_1, \dots, x_{n+1}) = [x_1, \dots, x_{n+1}]$

11.2 Definition: i) Es seien $p: X \rightarrow B$ und $q: Y \rightarrow B$ Überlagerungsabb. Ein Morphismus von p nach q ist eine stetige Abb. $f: X \rightarrow Y$, so daß $q \circ f = p$.

ii) Die Überlagerungsabb. $p: X \rightarrow B, q: Y \rightarrow B$ heißen äquivalent : \Leftrightarrow es gibt Morphismen f von p nach q und g von q nach p , so daß $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$.

11.3. Satz: Wenn B lokalzusammenhängender Raum ist und f ein Morphismus von der Überlagerung von $p: X \rightarrow B$ nach der Überlagerung $q: Y \rightarrow B$, dann ist f ein lokaler Homöomorphismus, d.h. zu jedem $x \in X$ ex. eine offene Umgebung U von x , die homöomorph auf eine offene Teilmenge von Y abgebildet werden.

11.4. Satz: Es seien $p: X \rightarrow B, q: Y \rightarrow B$ Überlagerungsabb. f ein Morphismus von p nach q . B zusammenhängend und lokal zusammenhängend und Y ebenfalls zusammenhängend, dann ist $f: X \rightarrow Y$ eine Überlagerungsabbildung.

11.5. Definition: Eine Überlagerungsabb. $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow B$ heißt eine universelle Überlagerungsabbildung für $B \Leftrightarrow$ zu jeder Überlagerungsabbildung $p: X \rightarrow B$ existiert ein Morphismus f von \tilde{p} nach p .

11.6 Definition: $p: X \rightarrow B$ sei eine Überlagerungsabbildung
 $f: Y \rightarrow B$ sei eine stetige Abbildung.

Eine Hochhebung von f ist eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$, so daß
 $p \circ g = f$.

11.7. Satz: Es seien $p: X \rightarrow B$ Überlagerungsabb. $f: Y \rightarrow B$ eine stetige Abbildung und $y_0 \in Y$. Weiter seien $g, h: Y \rightarrow X$ stetige Abb. mit $g(y_0) = h(y_0)$ und $p \circ g = p \circ h = f$.

Wenn Y zusammenhängend ist, dann ist $g = h$.

11.8. Satz: Es seien $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerungsabb. und $c: [a, b] \rightarrow B$ ein Weg in B . dann ex. zu jedem $x_0 \in X$ mit $p(x_0) = c(0)$ genau ein Weg $c': [0, 1] \rightarrow X$, so daß $c'(0) = x_0$ und $p \circ c' = c$.

11.9. Definition: $f, g: X \rightarrow Y$ seien stetige Abbildung

i) Eine Homotopie von f nach g ist eine stetige Abb. $H: X \times I \rightarrow Y$, so daß für alle $x \in X$ gilt $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$.

ii) f heißt homotop zu $g \Leftrightarrow$ es gibt eine Homotopie H von f nach Y .

Bemerkung: i) $H_t: X \rightarrow Y$ sei def. durch $H_t(x) = H(x, t)$

$(H_t)_{t \in [0,1]}$ ist eine Familie von stetigen Abb. $H_t: X \rightarrow Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$.

ii) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation in $C(X, Y)$.

Die Menge der Homotopieklassen von Abb. von X nach Y wird mit $[X, Y]$ bezeichnet.

Beispiel: $[x, \mathbf{R}^2]$ besteht aus einem einzigen Element $[0]$.

11.10 Satz: (Homotopiehochhebungssatz) $p: X \rightarrow B$ sei eine Überlagerungsabb. $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. $H: Y \times I \rightarrow B$ eine stetige Abbildung mit $H(y,0) = p \circ f(y) \quad \forall y \in Y$.

Dann ex. genau eine stetige Abb. $H': Y \times I \rightarrow X$, so daß $H'(y, 0) = f(y)$
 $\forall y \in Y$ und $p \circ H' = H$.

Index zu Topologie I

2

2 π -Periodische Funktion 27

A

A(D) 26
 abgeschlossen... 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25
 abgeschlossene Abbildung 6
 abgeschlossene Hülle 5, 7
 abgeschlossene Menge 5
 Absolutbetrag 4
 Abstand 10, 11
 abzählbar 2, 21
 abzählbare Basis 22, 25
 abzählbare Umgebungsbasis 5
 Abzählbarkeitsaxiom 5, 15
 Algebra 26, 27
 Algebra der Polynomfunktion... 26
 Anfangspunkt 14
 Anfangswertproblem 30
 Anwendungen auf topologische Vektorräume 24
 Arzela – Ascoli 29, 30
 Auswahlaxiom 1, 3
 Auswahlfunktion 3
 Auswertungsabbildung 28
 Axiom 2

Ä

äquivalent 31
 äquivalente Aussagen 1
 Äquivalente Normen 25
 Äquivalenz von Netzen und Filtern 18
 Äquivalenzrelation 1, 9, 10, 19, 20, 31
 äußerer Punkt 5

B

Bahn 12
 Banachraum 26
 Basis 3, 4, 16, 17
 Bernstein 2
 Berührungspunkt 5, 16, 22
 Beziehung zwischen Konvergenz von Filtern und Folgen 16
 bijektiv 14, 23
 bijektive Abbildung 1
 bijektive Abbildung 6
 Bild 19
 Bildfilter 16
 Borel-Heine 23

C

C(X) 26
 Cantor, Georg 2
 Cantorsche Diskontinuum... 11, 12, 13, 14
 cartesische Produkt 3
 Cauchy-Folge 24
 Chaos 12
 chaotisch 12
 chartesische Produkt 8
 C_k(X, Y) 27
 C_L(X, Y) 29
 Cohen, P.J. 2
 C_p(X, Y) 27
 C–Unteralgebra 27

D

Der Satz von Stone – Weierstraß 26
 dicht 6, 12, 26, 27
 Die Vervollständigung von metrischen Räumen 25
 direktes dynamisches System 12
 disjunkt 12, 18, 20
 diskret 30
 diskrete dynamische System 12
 diskrete Raum 6
 diskrete Topologie 4, 23
 diskreter Raum 4, 5, 13
 Dⁿ 14
 Dugundji 20
 Durchschnitt 3, 5, 15, 24
 Dynamik 12

E

echt feiner 16
 Eigenschaften der abgeschlossenen Mengen 5
 Eigenschaften der Initialtopologie 7
 Eigenschaften der Metrik 1
 Eigenschaften der Produkttopologie 8
 Eigenschaften des Umgebungssystems 5
 Eigenschaften einer Basis 4
 Eigenschaften offener Mengen 1
 Eigenschaften von K(x) 14
 Einbettung 20, 28
 Einheitskreis 10, 11
 einpunktig 13
 Eins 22
 Einschränkung 30
 Elementarfilter 16
 Elemtarfilter 17
 endlich 2, 13, 17, 21

endlichdimensional 25
 Endpunkt 14
 Endstück 17
 E_p 10
 erste Abzählbarkeitsaxiom 5, 15
 erzeugte Unteralgebra 26
 Erzeugung von Topologien 7
 euklidisch 14, 22
 euklidische Norm 23
 evaluation map 28

F

Familie 19
 fein 4
 feiner 16
 feinste Topologie 9
 Filter 15, 16, 22
 Filter und Konvergenz 15
 Filterbasis 16
 Finaltopologie 8
 Fischer Lieb 30
 Fixpunkt 12
 Fläche 11
 Folge 15, 16, 24
 Fortsetzungssatz 20
 Fourier-Reihe 27
 F_p 11
 Frèchet – Filter 16
 Fréchet-Filter 16
 Fundamentalsystem von Umgebungen von x 5

G

genus 11
Geometrische Beschreibung von C 11
 geordnete Menge 2
 gerichtete Menge 17
 Geschlecht 11
 GL(n, **R**) 23
 gleich mächtig 1
 gleichgradig 29
 gleichgradig stetig 29
 Gleichgradige Stetigkeit und der Satz von Arzela – Ascoli 29
 gleichmäßig beschränkt 30
 gleichmäßig stetig 24
 Gödel 2
 Grenzwert 15
 grob 4
 gröber 16
 größte Topologie 7
 größte Element 2
 Gruppe 9, 23
 Gruppenaktion 23
 Gruppenaktionen 9

H

Häufungspunkt	15, 22, 24
Hausdorff – Topologie	25
Hausdorff-Raum	19
Hausdorff-Raum	25
hausdorffsch	19, 20, 22, 23, 24, 28
Heine-Borel	23
Hilfssatz	20
Hochhebung	31
höchstens abzählbar	2
homöomorph	14, 20, 22, 25
Homöomorphismus ..	6, 14, 20, 23, 25, 28, 30
Homotopie	31
Homotopiehochhebungssatz	31
Homotopieklasse	31

I

identifizierend	9, 23, 24
Identifizierungstopologie	9, 24
Identität	6
indiskrete Raum	6, 15
indiskrete Topologie	4
induktiv geordnet	3
induzierte Topologie	7
Initialtopologie	7, 17, 29
injektive Abbildung	1
Inkusionsabbildung	7
innerer Punkt	5
Intervall	13
Inversenbildung	23
Isometrie	25
isomorph	25
Isomorphismus	10

K

kanonische Projektion ...	17, 19, 20
Kard	1
Kardinalität	1
Klassifikationen	7
kleinste Element	2
kleinste Unteralgebra	26
kofinite Topologie	4
Koinzidenz	17
kommutativer Ring	27
kompakt	22, 23, 24, 26, 27
Kompakte metrische Räume	24
Kompakte Räume	22
Kompakt-offene Topologie	27
Komplement	16
konstant	13
Kontinuumshypothese	2
konvergent	16
Konvergenz	15, 16
konvexe Hülle	10, 11

L

Lebesgue	24
----------------	----

Lebesguesche Zahl	24
leere Menge	15
Lemma von Lebesgue	24
Lemma von Urysohn	20
Lemma von Zorn	3
Lieb	30
Limes	19
linear geordnet	2
lokal euklidisch	14, 22
lokal wegweise zusammenhängend	14
lokal zusammenhängend	14
lokalendlich	21, 22, 25
Lokalendliche Systeme und Zerlegung der Eins	21
lokal kompakt	24, 25, 28
Lokalkompakte Räume	24

M

mächtig	1
Mächtigkeit von Mengen	1
Majorante	11
Manigfaltigkeit	22
map	28
max	26
maximalste Element	3
Maximum	23
Menge der Berührungspunkte	5
Metrik	1
metrische Raum	12, 19, 25
metrische Topologie	4
metrischer Raum	5, 25
min	26
minimalste Element	2
Minimum	23
Möbiusband	9
Moore-Smith-Folge	17
Morphismen	31
Morphismus	31

N

n – dimensional lokal euklidisch	14
natürliche Abbildung	7
natürliche Projektion	8
n–dim quaternionaler projektiver Raum	10
n-dimensionale komplexe projektive Raum	10
n-dimensionale reelle projektive Raum	9
Netz	17
Neumann-Bergmannsche Mengenlehre	2
neutrale Element	9
nichtorientierte Fläche	11
nirgends dicht	6
Norm	26
normal	19, 20, 21, 22, 25
Normale Raum	20
normierte R -Vektorraum	25

O

O(n)	23
obere Schranke	3
Obermenge	5
offen	6, 19, 20
offene Abbildung	6
offene Kern	5
offene Menge	1
offene Überdeckung	21
Orbit	12
Orbitraum	9
Ordnung	17
orientierte Fläche	10

P

Paar	17
p–adisch	1
p-adische Metrik	4
parakompakt	25
Parakompakte Räume	25
Peano	30
Peano-Kurve	12
Periode	12
Periodische Funktion	27
periodischer Punkt	12
Polynomfunktion	26, 27
Polynomfunktionen	26
Population	12
Potenzmenge	2, 4, 15
präkompakt	24
Primzahl	4
Produkttopologie	8, 27
Produkttopologien	8
Projektion	8
projektive Raum	9
Punkt	10, 11
punktfremd	9, 21
$\mathbb{Q}^{\times 20}$	

Q

Q 13	
quasikompakt	22, 23, 24, 27, 29
Quaternion	23
Quaternionen	10
Quotientenraum ...	9, 10, 11, 19, 20
Quotiententopologie	9
Q -Vektorraum	2

R

R -Algebra	27
Rand	6
Rand(A)	6
Randpunkt	6
reflexiv	1
regulär	19, 20, 22, 24, 28
Reguläre Raum	19, 20
Relation	17
Riemannsche Zahlentheorie	10

Topologie I

Riesz.....	25
Ring.....	27
R-Vektorraum	10, 25, 27

S

s^{-1} 14	
satuiert.....	10
Satz von Borel-Heine	23
Satz von F. Riesz.....	25
Satz von Stone.....	25
Satz von Stone Weierstraß	26
Satz von Tychonoff.....	23, 25
Satz von Weierstraß	27
Satz von Zermelo	3
Schiefkörper	10
Schmidt, Jürgen.....	2
Schröder – Bernstein	2
sensitiv	12
Shift – Abbildung.....	12
Skalarprodukt.....	8
S^n 14, 24	
Spann(D).....	26
Spurtopologie	7
Standardtopologie	25
Standard-Topologie.....	8
stetig .. 6, 15, 17, 20, 21, 23, 26, 27	
Stetige Abbildungen.....	6
Stone	25, 26
Struktur	23
Subbasis	4, 7, 23
Summentopologie	8
sup	26, 29
supp(f).....	21
Supremum.....	24
surjektiv.....	9, 13, 23, 30
surjektive Abbildung	2, 10
Symbolische Dynamik und Chaos	12

T

T_0 -Raum.....	18
T_1 -Raum.....	18, 19
T_2 -Raum.....	18, 19
T_3 -Raum.....	18, 19
T_4 -Raum.....	18, 19, 20
Teilraum.....	7
Teilraumtopologie.....	27
Teilraumtopologie.....	7
Tietzscher Fortsetzungssatz.....	20

Topologie der gleichmäßigen Konvergenz	26
Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz	29
Topologie.....	3, 25
Topologie der punktweisen Konvergenz	27
topologisch isomorph.....	25
topologisch transitiv.....	12
topologische Abbildung.....	6
topologische Gruppe.....	23
topologische Manigfaltigkeit	22
topologische Produkt 8, 17, 19, 20, 23	
topologische Raum	3
Topologische Räume	3
topologische Struktur.....	3
topologische Summe.....	8, 10
topologischer Vektorraum	25
total unzusammenhängend... 13, 14	
Träger	21
transitiv	1
Trennungseigenschaften	18
triadische Darstellung	11
trigonometrische Polynome	27
trivialer Ultrafilter.....	16
Trf	21
Tychonoff	23, 25

U

U(n)	23
Uhrzeigersinn.....	11
Ultrafilter	16, 22
Umgebungsbasis.....	14
Umgebung	4, 14, 24
Umgebungsbasis	5, 24
Umgebungsfiler	15
Umgebungssystem.....	15
Umgebungssystem von x	4
universelle Überlagerungsabbildung	31
Unteralgebra	26, 27
untere Schranke	3
untergeordnete Zerlegung der Eins	22, 25
Unterraum.....	7, 19, 20, 22
Untervektorraum.....	25
U_p 11	
Urbild.....	6
Urysohn	20
Urysohn – Funktion	20

Ü

überabzählbar	12
Überdeckung	21, 22, 24
Überlagerungsabbildung	31
Überlagerungsabbildung	30
Überlagerungsabbildungen.....	30

V

Vektorraum	3, 25
Vektorraumisomorphismus	25
Verallgemeinerung von Folgen. 17	
Vereinigung.....	3, 5, 13
Verfeinerung	25
Vergleich von Topologien.....	4
vergleichbar.....	4
Verkleben.....	10
Verknüpfung *	14
Vervollständigung.....	25
vollständig.....	24
vollständig regulär.....	19
vollständige reguläre Raum.....	20
V_p 11	

W

Weg.....	14
wegweise zusammenhängend... 14	
wegzusammenhängend	14
Weierstraß	26, 27
wohlgeordnet.....	3
Wohlordnung	3
Wohlordnungssatz.....	3

Z

Zerlegung der Eins	22
Zermelo	3
Zorn.....	3
Zusammenhang	12
zusammenhängend	12
Zusammenhangskomponente ... 13, 14	
Zwischenwertsatz	13