Gewöhnliche Differentialgleichungen

Kurzskriptum nach einer Vorlesung von
Professor Dr. W. Kaballo

Universität Dortmund – Sommersemester 1998

Letzte Änderung: 29. Mai 2002

Dieses Kurzskript ist aus meiner persönlichen Mitschrift der Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

bei *Professor Dr. W. Kaballo* im Sommersemester 1998 entstanden. Ich habe versucht alles richtig wiederzugeben, kann allerdings keine Garantie darauf geben. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß dieses Skriptum Fehler enthält.

 Dieses Skriptum ist weder eine offizielle noch eine von *Professor Kaballo* autorisierte Version. Deshalb ist bei Fehlern zuerst davon auszugehen, daß diese von mir stammen.

Ingo Manfraß

Inhaltsverzeichnis zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Wachstumsprozesse und lineare DGLs erster Ordnung

x(t) - Anzahl einer Population zur Zeit t

$\dot{x}(t)$ - Wachstumsgeschwindigkeit

#1# $\dot{x}(t)=a(x,t)\cdot x(t)$

Wenn a nicht von x abhängt:

homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

1.1 Feststellung

Es seien $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall und $a\in C(I,\mathbf{K})$.

Mit einer Stammfunktion $A\in C^1(I,\mathbf{K})$ von a sind alle **K**-wertigen Lösungen von

#2# $\dot{x}(t)=a(t)\cdot x(t)$ über einem Intervall $I_0\subseteq I$ gegeben durch $x(t)=C\cdot e^{A(t)}$, $C\in\mathbf{K}$.

1.2. Beispiel, Bemerkung

a) Man kann Eindeutigkeit erreichen durch das Vorschreiben von Anfangswerten

$x(t_0)=x_0,\ t_0\in I$

Das Anfangswertproblem

#3# $\dot{x}(t)=a(t)\cdot x(t),\ x(t_0)=x_0$

hat die eindeutige Lösung

#4# $x(t)=x_0\exp(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds)$, $t\in I$

b) a(t)=a konstant.

Lösung von #2#: $x(t)=C\cdot e^{a\cdot t}$

Lösung von #3#: $x(t)=x_0\cdot e^{a(t-t_0)}$

1.3 Beispiel

#5# a) $\alpha>0,\ F(\xi):=\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}\cdot e^{-ix\xi}\ dx=2\sqrt{\pi\alpha}\cdot e^{-\alpha\xi^2}$

b) #5# hat Anwendung in der Fourier-Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, Wärmeleitungsgleichung.

#6# Gauß-Kern: $G(x,t)=(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

Fourier-Transformierte:

#7# $\hat{g}(\xi):=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbf{R}} g(x)\cdot e^{-ix\xi}\ dx$

#8# $\hat{G}^t(\xi):=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t\xi^2}{2}}=t^{-\frac{1}{2}}G^{\frac{1}{t}}(\xi)$, t>0

Integrale immer 1: $\int G(t)=1$

$t\to 0$: δ-Distribution (glm.)

inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

#9# $\dot{x}(t)=a(t)\cdot x(t)+b(t)$, $a,b\in C(I)$

$\Leftrightarrow\ \dot{x}-ax=b$

Durch $D: x\to\dot{x}-ax$ wird ein linearer Operator $D: C^1(I)\to C(I)$ definiert, dessen Kern $N(D)=\{\,x\mid Dx=0\,\}$ eindimensional ist.

1.4 Feststellung

Es seien E,F Vektorräume und $D: E\to F$ linear.

Es gelte $Dx_0=b$ für ein $x_0\in E$.

Dann ist der affine Raum

#10# $x_0+N(D)=\{ x=x_0+y \mid y\in N(D)$, d.h. $Dy=0 \}$
die Menge aller Lösungen von Dx=b.

1.5 Variation der Konstanten zur Lösung von #9#

#11# Ansatz: $x(t)=C(t)\cdot e^{A(t)}$, so gilt:

#12# $\dot{C}(t)=b(t)\cdot e^{-A(t)}$

1.6 Beispiel

Wachstumsprozeß:

$\dot{x}=a(x)\cdot x,\ a(x)=b(g-x)$

g: Grenzpopulation (kann nicht überschritten werden)

#13# $\dot{x}=b(g-x)x=ax-bx^2$, a,b,g>0

Lösungen: x=0, x=g

Differentialgleichung #13# ist <u>nicht</u> linear

Für Lösungen $x\neq 0$ setze $y=\frac{1}{x},\ x=\frac{1}{y}$, so folgt:

#14# $\dot{y}=-ay+b$

Inhomogene lineare Differentialgleichung

x=g löst #13# $\Rightarrow$ $y=\frac{1}{g}$ löst #14#

Allgemeine Lösung von #14#:

$y(t)=\frac{1}{g}+C\cdot e^{-at}$

$y(t)>0$ für $t\in\mathbf{R}$ $\Leftrightarrow$ $C\geq 0$

$x(t)=\left(\frac{1}{g}+C\cdot e^{-at}\right)^{-1}$, $C\geq 0$

2. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

2.1 Definition: Es seien $D\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{K}$ offen und $f\in C(D,\mathbf{K})$.
Für ein Intervall $I_0\subseteq\mathbf{R}$ heißt eine differenzierbare Funktion $\varphi: I_0\to\mathbf{K}$ <u>Lösung</u> der Differentialgleichung

#1# $y'=f(x,y)$,

falls ihr Graph $\Gamma(\varphi)\subseteq D$ und $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$ für $x\in I_0$ gilt.

2.2 Bemerkung

a) Ist φ Lösung von #1#, so gilt $\varphi\in C^1(I_0,\mathbf{K})$
b) $\mathbf{K}=\mathbf{R}$: #1# beschreibt „Richtungsfeld“.

2.3 Bemerkung

a) $I,J\subseteq\mathbf{R}$ Intervalle, $f\in C(I,\mathbf{R})$, $g\in C(J,\mathbf{R})$.

#2# $y'=f(x)\cdot g(y)$

heißt Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

b) Gilt $g(y_0)=0$, so ist $\varphi(x)=y_0$ Lösung von #2#.

c) <u>Exakt</u>: Es seien $G\in C^1(J)$, $F\in C^1(I)$ Stammfunktionen von $\frac{1}{g}, f$.

Ist $\varphi\in C^1(I_0)$ eine Lösung von #2#, so gilt:

$(G\circ\varphi)'(x)=f(x)$

#3# $\Rightarrow$ $G(\varphi(x))=F(x)+c$, $x\in I_0$, für $c\in\mathbf{R}$

2.4 Satz: Es seien $I,J\subseteq\mathbf{R}$ offene Intervalle, $f\in C(I)$, $g\in C(J)$ und $g(y)\neq 0$ für $y\in J$.
Zu $x_0\in I$ und $y_0\in J$ gibt es ein offenes $I_0\subseteq I$ mit $x_0\in I_0$, so daß das Anfangswertproblem (AWP)

#4# $y'=f(x)\cdot g(y)$, $y(x_0)=y_0$

genau eine Lösung $\varphi\in C^1(I_0)$ hat.
Mit

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}, \qquad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

ist diese gegeben durch

#5# $\varphi(x)=G^{-1}(F(x)),\ x\in I_0$.

2.5 Beispiel

#6# $y' = -\frac{x}{y}$

auf I=**R**, J=]0,∝[.

Sei $x_0=0$, $y_0>0$

Lösung: $\varphi(x) = \sqrt{y_0^2 - x^2}$, I_0=]-y_0,y_0[

<u>Beachte</u>: Das Existenzintervall I_0 der Lösung hängt vom Anfangswert y_0 ab.

<u>Allgemein</u>: Das maximal mögliche Intervall I_0 ist das mit $x_0\in I_0\subseteq I$, $F(I_0)\subseteq G(J)$.

2.6 Beispiel

#7# $y' = \sqrt{|y|}$

hat stationäre Lösung y=0 über **R**,]0,∝[:

Lösungen nach #3#:

$\varphi(x)=\frac{1}{4}(x+c)^2$, $x\in I_c$=]-c,∝[

bzw. $\varphi(x)=-\frac{1}{4}(b-x)^2$, $x\in I_b$=]-∝,b[

Auf ganz **R** definierte Lösungen: a≤b:

#8# $$\varphi(x) = \varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-b)^2 & , x > b \\ 0 & , a \le x \le b \\ -\frac{1}{4}(a-x)^2 & , x < a \end{cases}$$

#9# Anfangswertproblem: $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0)=y_0$

$y_0\neq 0$: eindeutig lösbar <u>nahe</u> 0, aber <u>nicht</u> eindeutig lösbar auf **R**, da Verzweigung möglich.

$y_0=0$: Es <u>gibt</u> über jedem Intervall um 0 <u>mehrere</u> Lösungen!

2.7 Beispiel

#10# $y'=e^y\cdot\sin x$

Anfangswertproblem: $y(0)=y_0\in$ **R**

#11# $\Rightarrow \quad \varphi(x) = -\ln(\cos x + e^{-y_0} - 1)$

$x\in I_0=I_0(y_0)=\{\ x \text{ nahe } 0 \mid \cos x + e^{-y_0} - 1 > 0\ \}$

<u>Fall 1</u>: $e^{-y_0} - 1 > 1 \iff y_0 < -\ln 2$: I_0=**R**, φ 2π-periodisch

<u>Fall 2</u>: $e^{-y_0} - 1 = 1 \iff y_0 = -\ln 2$: I_0=]-π,π[

φ → ∝, x → ±π

<u>Fall 3</u>: $e^{-y_0} - 1 < 1 \iff y_0 > -\ln 2$: I_0=]-c,c[

φ → ∝, x → ±c

y_0 → ∝: c → 0 !!!

Existenzintervall und globales Verhalten der Lösung hängen stark von y_0 ab!

3. Pfaffsche Formen

3.1 Bemerkung

a) $f\in C^1(D,\mathbf{R})$, $D\subseteq \mathbf{R}^n$ offen.

$f(x+h)-f(x)=df(x)(h)+P(|h|)$;

hierbei ist $df \in \mathbf{R}^{n'} = (T_x(\mathbf{R}^n))'$ eine Linearform auf $\mathbf{R}^n = T_x(\mathbf{R}^n)$, die Ableitung von f in $x \in D$.

#1# $$df(x)(h) = \sum_{\mu=1}^{n} \partial_\mu f(x) \cdot h_\mu \qquad , h \in \mathbf{R}^n = T_x(\mathbf{R}^n)$$

Speziell $f(x) = x_\nu$: $dx_\nu(x)(h) = h_\nu$, also
$\{dx_1, ..., dx_n\}$ duale Basis des $\mathbf{R}^{n'}$ zu $\{e_1, ..., e_n\}$.

b) Es sei ω: $D \to \mathbf{R}^{n'}$ eine C^k-Abbildung

#2# $$\Rightarrow \qquad \omega(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)\, dx_\nu \ ,$$

$\omega(x)e_\mu = a_\mu(x) \in C^k(D)$ wegen $dx_\nu(e_\mu) = \delta_{\nu\mu}$

#3# Statt #1# schreibe $$df(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \partial_\mu f(x)\, dx_\mu \ .$$

3.2 Definition: Es sei $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen.
Eine Pfaffsche Form oder 1-Form auf D ist eine Abbildung ω: $D \to (\mathbf{R}^{n'})$.
Es sei $\Omega_k^1(D)$ der Raum aller C^k-Pfaffschen Formen auf D.

3.3 Transformationen
$U \subseteq \mathbf{R}^p$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen, $k \in \mathbf{N}_0$, $\psi \in C^{k+1}(U,D)$

a) Punkte
$U \ni u \to \psi(u) \in D$

b) Funktionen
f: $D \to \mathbf{K}$; $f \circ \psi$: $U \to \mathbf{K}$
ψ^*: $G(D) \to G(U)$

#4# $$\psi^* f = f \circ \psi$$

c) Wege
$\gamma \in C(I,U)$
$\Rightarrow \ \beta = \psi_*(\gamma) = \psi \circ \gamma \in C(I,D)$
Tangentenvektor: $t_\gamma = \dot{\gamma}(t)$

#5# $$\Rightarrow \qquad t_{\psi_*\gamma}(t) = \psi'(\gamma(t))t_\gamma(t)$$

d) Vektorfelder
$V(u) \in T_u(\mathbf{R}^p)$

#6# $$\psi_*(V)(\psi u) = \psi'(u)(V(u)) = D\psi(u)V(u)\, , u \in U$$

$V \in C^1(U)$ Vektorfeld $\Rightarrow$ $\psi_* V$ Vektorfeld auf $\psi(U) \subseteq D$

e) 1-Formen: $\omega \in \Omega_k^1(D)$
$\omega(x)$ ist Linearform auf $\mathbf{R}^n = T_x(\mathbf{R}^n)$.
Speziell sei $x = \psi(u)$

#7# $$(\psi^* \omega)(u)(h) := \omega(\psi(u))(\psi_*(u)h) \qquad , u \in U, h \in \mathbf{R}^p$$

<u>Beachte</u>: $\psi \in C^{k+1} \ \Rightarrow \ \psi_* = \psi' \in C^k$, also
$\omega \in \Omega_k^1(D) \ \Rightarrow \ \psi^* \omega \in \Omega_k^1(U)$

f) Stets gilt: $(\psi_1 \circ \psi_2)^* = \psi_2^* \circ \psi_1^*$

3.4 Satz: Es seien $U \subseteq \mathbf{R}^p$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen, $\psi \in C^1(U,D)$, $f \in C^1(D,\mathbf{K})$.
Dann gilt:

#8# $$\psi^*(df) = d(\psi^* f).$$

Warnung: Bei Vektorfeldern ist die Gradientenbildung mit der Koordinatentransformation nicht verträglich.

3.5 Beispiele

a) $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)^T$: $U \to \mathbf{R}^n$, $dx_\nu \in \Omega^1(\mathbf{R}^n)$

#9# $\psi^*(dx_\nu)(u)=d\psi_\nu(u)$

#10# $\psi^*(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)\, dx_\nu)(u) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\psi(u))\, d\psi_\nu(u)$

b) Polarkoordinaten

$$\psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Zu $f\in C^1(\mathbf{R}^2)$ sei $g=\psi^* f\in C^1(\mathbf{R}^2)$ (oder $\in C^1(]0,\infty[\times]-\pi,\pi[)$

#11# $\psi^*(df)(r,\varphi)=dg(r,\varphi)=\frac{\partial g}{\partial r}dr + \frac{\partial g}{\partial \varphi}d\varphi$

3.6 Bemerkungen

$\exists$ Bijektion j: Vektorfeldern $\leftrightarrow$ 1-Formen

$V\in C^k(D,\mathbf{R}^n) \Rightarrow \omega=jV\in\Omega_k{}^1(D)$

#12# $(jV)(x)(h)=\langle h,V(x)\rangle$, $x\in D$, $h\in\mathbf{R}^n=T_x(\mathbf{R}^n)$ (abhängig vom Skalarprodukt)

#13# $j(a_1(x),...,a_n(x))^T=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)\, dx_\nu$ (abhängig von Basis)

Die Identifikation j: V $\mapsto$ ω ist invariant nur unter affinen Isometrien.

Für $g\in C^1(D,\mathbf{R})$ gilt:

#14# grad g=V $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial g}{\partial x_\nu} = a_\nu$ $\Leftrightarrow$ dg=ω

3.7 Definition

#15# a) $\omega\in\Omega_1{}^1(D)$ heißt <u>geschlossen</u>, falls $\frac{\partial}{\partial x_\nu} a_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_\nu$, $1\le\nu,\mu\le n$.

b) $\omega\in\Omega_0{}^1(D)$ heißt <u>exakt</u>, falls es $g\in C^1(D)$ gibt mit $\omega=dg$, dann heißt g <u>Stammfunktion</u> von ω.

Dann: ω exakt $\Leftrightarrow$ V hat Potential

ω geschlossen $\Leftrightarrow$ V wirbelfrei

($\Leftrightarrow$ DV symmetrisch $\Leftrightarrow$ rotV=0 im $\mathbf{R}^3$)

Satz von Schwarz: $\omega\in\Omega_1{}^1(D)$ exakt $\Rightarrow$ ω geschlossen

3.8 Beispiel

$\omega(x,y) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ auf $\mathbf{R}^2/\{(0,0)\}$; ω ist geschlossen, aber nicht exakt.

3.9 Definition: Eine Menge $S\subseteq\mathbf{R}^n$ heißt sternförmig bzgl. $a\in S$, falls gilt:

$x\in S \Rightarrow [a,x]\subseteq S$.

3.10 Es sei $D\subseteq\mathbf{R}^n$ offen und sternförmig.

Dann ist jede geschlossene Form $\omega = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)\, dx_\nu \in\Omega_1{}^1(D)$ exakt.

#16# Im Beweis: $g(x) = \int_{[0,x]}\omega = \sum_{\mu=1}^{n}\int_0^1 a_\mu(tx)\, dt\, x_\mu$

3.11 Bemerkung

Es sei ψ: D $\to$ G C^2-Diffeomorphismus, D sternförmig.

Sei $\omega\in\Omega_1{}^1(G)$ geschlossen $\Rightarrow$ $\psi^*\omega\in\Omega_1{}^1(D)$ geschlossen

$\Rightarrow$ $\exists\, g\in C^2(D)$: $\psi^*\omega=dg$

$\Rightarrow$ $\omega=d((\psi^{-1})^*g)$

$\Rightarrow$ ω exakt

Satz (Riemann): $G\subseteq\mathbf{R}^2$ einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ G diffeomorph zum Einheitskreis

4. Exakte Differentialgleichungen

4.1 Bemerkung: $G\subseteq\mathbf{R}^2$ Gebiet, $f\in C(G,\mathbf{R})$, $I_0\subseteq\mathbf{R}$ Intervall

$\varphi\in C^1(I_0,\mathbf{R})$, $\Gamma(\varphi)\subseteq G$.

Setze $\gamma(t)=(t,\varphi(t))$; dann ist $\gamma: I_0 \to G$ ein Weg.

#1# Für $\omega:=dy-f(x,y)dx\in\Omega^1(G)$ gilt:

$\gamma^*(\omega)=(\dot{\varphi}(t)-f(t,\varphi(t)))dt$

Also: φ ist Lösung der Differentialgleichung

#2# $y'=f(x,y)$

$\Leftrightarrow\ \gamma^*\omega=0$.

4.2 Definition: Es sei $\omega\in\Omega_0{}^1(G)$ eine stetige 1-Form auf $G\subseteq\mathbf{R}^2$.

Ein glatter (regulärer) C^1-Weg $\gamma: I_0 \to G$ heißt Lösung der Differentialgleichung

#3# $\omega=0$, falls $\gamma^*\omega=0$ ist.

4.3 Bemerkung

a) Ist $\alpha: I_1 \to I_0$ eine C^1-Koordinatentransformation reeller Intervalle und $\gamma_1=\gamma\circ\alpha$, dann folgt aus $\gamma^*\omega=0$ auch $\gamma_1{}^*\omega=0$

Löst also γ die Differentialgleichung $\omega=0$, so gilt dies auch für jeden zu γ äquivalenten glatten Weg.

b) Für $h\in C(G)$ mit $h(x,y)\neq0$ auf G gilt

#4# $\gamma^*\omega=0\ \Leftrightarrow\ \gamma^*(h\omega)=0$

Ist $\omega(x_0,y_0)\neq0$, so ist nahe (x_0,y_0) $\quad\omega=0\ \Leftrightarrow$ explizite Differentialgleichung

c) Geometrische Interpretation von $\omega=0$:

Zu $q=(x,y)\in G$ und $\omega(q)\neq0$ legt $\omega(q)\in(\mathbf{R}^2)'$ den eindimensionalen Unterraum

#5# $N(\omega(q))=\{\ h\in T_q(\mathbf{R}^2) \mid \omega(q)h=0\ \}$

von $T_q(\mathbf{R}^2)$ fest, also eine Gerade durch q.

Es ist $\gamma: I_0 \to G$ Lösung von #3# $\Leftrightarrow\ \dot{\gamma}(t)\in N(\omega(\gamma(t)))$

4.4 Definition: Die Differentialgleichung $\omega=0$ heißt exakt, falls ω exakt ist.

Eine Stammfunktion A von ω heißt Integral von $\omega=0$.

4.5 Satz: Es sei $A\in C^1(G,\mathbf{R})$ ein Integral von $\omega=0$.

Ein glatter C^1-Weg $\gamma: I_0 \to G$ ist genau dann eine Lösung von $\omega=0$, wenn $A\circ\gamma$ konstant ist.

4.6 Bemerkung

a) Lösungen von $\omega=0$ verlaufen also in den Niveaumengen

$N_c(A)=\{\ q\in G \mid A(q)=c\ \}$ von A.

Ist $\omega(q)\neq0$ und $c=A(q)$, dann ist $N_c(A)$ eindimensionale C^1-Mannigfaltigkeit

$\Leftrightarrow$ Spur eines C^1-glatten Jordan-Weges durch q.

nahe q: Es kann γ sogar als Graph einer Funktion gewählt werden

d.h.: $\quad A(x,y)=c\ \Leftrightarrow\ y=\varphi(x)$ (oder $x=\varphi(y)$)

$c\in\mathbf{R}$ heißt regulärer Wert von A, falls für alle $q\in G$ mit $A(q)=c$ gilt: $dA(q)\neq0$.

Dann "besteht $N_c(A)$ aus glatten Kurvenstücken".

$N_c(A)$ ist endliche disjunkte Vereinigung von glatten C^1-geschlossenen Jordan-Kurven $\Leftrightarrow$ $N_c(A)$ kompakt

Lemma (Sard): Fast alle $c\in\mathbf{R}$ sind regulär.

b) $y'=f(x)\cdot g(y)$ $\quad$ über $I\times J$, $g(y)\neq0$ auf J

Stammfunktion: $\qquad A(x,y)=G(y)-F(x)=c$

c) Stationäre Lösungen von $\omega=0$: $\omega(q)=0$, $\gamma(t)=q$

d) Zu $\omega\in\Omega_1{}^1(G)$ suche $h\in C^1(G)$ mit $h(q)\neq0$ auf G, so daß $h\omega$ exakt ist; dann heißt h integrierender Faktor oder Eulerscher Multiplikator für $\omega=0$.

4.7 Satz: Für ω=a dx+b dy$\in\Omega_1^1$(G) und h$\in C^1$(G) ist hω geschlossen

$\Leftrightarrow$ Mit $\delta = \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}$ gilt:

#6# $$b\frac{\partial h}{\partial x} - a\frac{\partial h}{\partial y} = h\delta$$

4.8 Bemerkung

a) G=I×J, b(x,y)≠0, B=$\frac{\delta}{b}$ hänge nur von x ab.

Suche Lösung von #6#, die auch nur von x abhängt.

#7# Dann: bh'(x)=hδ $\Leftrightarrow$ h'=Bh

Lösung: $h(x) = c \cdot e^{\int B(x)\,dx}$

Analog Lösungen, die nur von y, x^2+y^2, xy, ... abhängen.

Autonome Systeme (von 2 Variablen)

#8# $\dot{x}=f(x,y)$, $\dot{y}=g(x,y)$

G$\subseteq\mathbf{R}^2$ Gebiet, f,g$\in$C(G,**R**); definiere v:=$(f,g)^T\in C(G,\mathbf{R}^2)$ Vektorfeld auf G.

Lösung von #8#: (x,y)$\in C^1(I_0,\mathbf{R}^2)$

Mit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ bedeutet dies $\dot{\gamma}$(t)=v(γ(t)).

Dann liegt $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ im Kern der Linearform

#9# ω(x,y)=f(x,y) dy-g(x,y) dx.

4.9 Satz: Für ein System #8# definiere ω gemäß #9#.

Dann ist jede Lösung $\gamma\in C^1(I_0,G)$ von #8# auch Lösung von ω=0.

4.10 Beispiel: Räuber-Beute-Modell

a) Beute-Population x Wachstumsrate $\alpha-\rho y$

Räuber-Population y Wachstumsrate $-\mu+\beta x$

#10# $\dot{x}=(\alpha-\rho y)x$, $\dot{y}=(\beta x-\mu)y$, $\alpha,\beta,\rho,\mu>0$

#11# b) $\omega=(\alpha-\rho y)x\,dy+(\mu-\beta x)y\,dx=0$

#12# Stammfunktion: $A(x,y)=\mu\cdot\ln x-\beta x+\alpha\cdot\ln y-\rho y$

Kritischer Punkt von A: $(x_0,y_0)=(\frac{\mu}{\beta},\frac{\alpha}{\rho})$

5. Schwingungen

Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

x(t)$\in$**R** Ort eines Punktes auf **R** zur Zeit t der Masse m>0, auf diesen wirke ein Kraftfeld f(x), $f\in$C(I,**R**).

#1# Bewegungsgleichung: $m\ddot{x}=f(x)$

5.1 Bemerkung

a) #1# $\Leftrightarrow$ System erster Ordnung

#2# $\dot{x}=\frac{y}{m}$, $\dot{y}=f(x)$

y=m$\dot{x}$ ist der <u>Impuls</u> des Massenpunktes.

Die Lösungskurven von #2# bilden das <u>Phasenportrait</u> von #2# oder auch von #1#.

b) Jede Lösung von #2# löst auch

#3# $\omega(x,y)=\frac{y}{m}\,dy-f(x)\,dx=0$

Es sei U$\in C^1$(I) Stammfunktion von $-f$ (Physik: Potential von f)

#4# $\Rightarrow$ Energie $E=\frac{1}{2m}y^2+U(x)$ Stammfunktion von ω

Energie-Erhaltungssatz: E ist konstant entlang der Lösungen von #2#.

c) Stationäre Lösungen von #2# in kritischen Punkten von E:

$dE(x,y)=\omega(x,y)=0 \iff y=0$ und $f(x)=0$

(Ruhelage; d.h. Impuls=Kraft=0)

5.2 Bemerkung: Energiesatz

#5# $\frac{m}{2}\dot{x}^2+U(x)=\frac{1}{2m}y^2+U(x)=E$

Für Lösungen muß $E-U(\varphi(t))>0$ gelten.

#6# Dann ist #5# $\iff$ $\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}$

Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

5.3 Satz. Es sei ein Anfangswert $x(t_0)=x_0$ mit $U(x_0)<E$ gegeben.

Dann hat #6# nahe t_0 genau eine Lösung φ mit $\varphi(t_0)=x_0$, und für diese gilt:

#7# $t-t_0=\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(\xi))}}$

Es sei φ Lösung von #7# $\underset{\dot\varphi\neq 0}{\Rightarrow}$ $m\ddot{\varphi}-f(\varphi)=0$ d.h. #1#.

5.4 Beispiel

a) Pendel-Schwingungen

#8# $m\ddot{x}=-m\omega^2\sin x$ mit $\omega^2:=\frac{g}{l}>0$.

#9# <u>Potential</u>: $U(x)=-m\omega^2\cos x$

#10# $x(0)=-A,\ \dot{x}(0)=0$ Anfangsbedingung

b) $E=-m\omega^2\cos A$

#11# Aus #7#: $t=\int_{-A}^{\varphi(t)}\frac{d\xi}{\sqrt{2\cos\xi-2\cos A}}=\frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a(t)}\frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}}=\frac{1}{\omega}(F(a(t),k)-F(-\frac{\pi}{2},k))$

$a(t)=\arcsin(\frac{1}{k}\sin\frac{\varphi(t)}{2})$

mit $F(y,k)=\int_0^y\frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}}$ elliptisches Integral 1. Gattung

zum Modul $0\leq k\leq 1$.

#12# Lösung: $\varphi(t)=2\arcsin(k\cdot\mathrm{sn}(\omega t-K(k),k))$, $k=\sin\frac{A}{2}$ mit $K(k)=F(\frac{\pi}{2},k)$

sn: Sinus Amplitudius zum Modul k

φ ist periodisch mit Periode $T=\frac{4}{\omega}K(k)$

5.5 Beispiel

a) Linearisierte Version von #8#:

#13# $m\ddot{x}=-m\omega^2 x$ (für kleine $|x|$)

Potential: $U(x)=\frac{m}{2}\omega^2x^2$ („harmonischer Oszillator“)

#14# Lösung von #13# und #10#: $\varphi(t)=-A\cdot\cos\omega t$

#15# Allgemeine Lösung von #13#: $x(t)=B\cdot\sin\omega t-A\cdot\cos\omega t$

Periode $T=\frac{2\pi}{\omega}$ hängt <u>nicht</u> von der Amplitude ab.

b) Es wirke äußere Kraft $mF(t)$ auf das Pendel.

#16# $\ddot{x}+\omega^2x=F(x)$

Es sei $F(t)=M\cdot\cos\alpha t$ periodisch

#17# Allgemeine Lösung von #16#: $\varphi(t)=B\cdot\sin\omega t-A\cdot\cos\omega t+\frac{M}{\omega^2-\alpha^2}\cos\alpha t$ $\alpha\neq\omega$

#18# <u>insbesondere</u>: $\varphi(\alpha,t)=\frac{M}{\omega^2-\alpha^2}(\cos\alpha t-\cos\omega t)\underset{\alpha\to\omega}{\longrightarrow}\frac{M}{2\omega}t\cdot\sin\omega t=:\varphi(\omega,t)$

$\alpha=\omega$ Resonanzfall: Amplitude der Schwingung $\lim_{t\to\infty}\frac{M}{2\omega}t=\infty$.

5.6 Beispiel

a) Reibungsterm $2\rho>0$

#19# $\ddot{x}+2\rho\dot{x}+\omega^2x=F(t)$

Der Lösungsraum der homogenen Gleichung ist zweidimensional. (Satz 9.2)
homogene Differentialgleichung:

#20# $\ddot{x}+2\rho\dot{x}+\omega^2x=0 \Leftrightarrow \lambda=-\rho\pm\sqrt{\rho^2-\omega^2}$

b) $\rho\geq\omega$: $\lambda_+,\lambda_-<0 \rightarrow$ exponetiell abklingende Lösungen

#21# $\varphi(t)=A\,e^{\lambda_+t}+B\,e^{\lambda_-t}$, $\rho>\omega$ Kriechfall

#22# $\varphi(t)=A\,e^{-\rho t}+Bt\,e^{-\rho t}$, $\rho=\omega$ Aperiodischer Grenzfall

c) $\rho<\omega$: $\lambda_\pm=-\rho\pm i\sigma$, $\sigma=\sqrt{\omega^2-\rho^2}$

#23# $\varphi(t)=A\,e^{-\rho t}\cos\sigma t+Bt\,e^{-\rho t}\sin\sigma t$ gedämpfte Schwingung

In #19# sei $F(t)=M\cdot e^{i\alpha t}$

#24# Also: $\varphi(t)=\frac{M}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\rho^2\alpha^2}}e^{i(\alpha t+\delta)}$

wobei δ durch $\frac{M}{\omega^2-\alpha^2+2\rho\alpha i}:=\left|\frac{M}{\omega^2-\alpha^2+2\rho\alpha i}\right|e^{i\delta}$ definiert ist.

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung: #24# + #21#,#22#,#23#

Anmerkung: keine Resonanz; auch für $\alpha=\omega$ bleibt Amplitude beschränkt.

Ihr Maximum liegt bei $\alpha=\sqrt{\omega^2-2\rho^2}$ (für $\omega^2-2\rho^2>0$).

Es ist $\delta<0$, da $\operatorname{Im}\frac{M}{\omega^2-\alpha^2+2\rho\alpha i}<0$, d.h. die Schwingung ist <u>verzögert</u> im Vergleich zur äußeren Kraft F (Phasenverschiebung).

5.7 Beispiel: Kleine Schwingungen eines Massepunktes um Ruhelage 0 im $\mathbf{R}^n$.

#25# Potential: $U(x)=\frac{m}{2}\langle x,Ax\rangle$ mit $A\in M_n(\mathbf{R})$ positiv definit.

#26# $m\ddot{x}=-\operatorname{grad}U(x)=-mAx$

Es gibt orthogonale Matrix $T\in O_n(\mathbf{R})$ mit

#27# $T^{-1}AT=D=\operatorname{diag}(\omega_1^2,\dots,\omega_n^2)$, $\omega_j>0$.

#28# Also: $\ddot{\xi}=-D\xi$, $\ddot{\xi}_j=-\omega_j^2\xi_j$

#29# Lösung: $\xi_j(t)=A_j\sin(\omega_jt-c_j)$

Überlagerung von harmonischen Schwingungen in Richtung der Hauptachsen von A; die Frequenzen ω_j sind die Wurzeln der Eigenwerte ω_j^2 von A.

6. Satz von Picard-Lindelöf

6.1 Definition: Es seien $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall, $D\subseteq\mathbf{K}^n$ offen, $\Omega=I\times D$, $f\in C(\Omega,\mathbf{K})$.

Für ein Intervall $I_0\subseteq I$ heißt $\varphi\in C^n(I_0,\mathbf{K})$ Lösung der Differentialgleichung

#1# $x^{(n)}=f(t,x,\dot{x},\dots,x^{(n-1)})$,

wenn $\{(\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\dots,\varphi^{(n-1)}(t)) \mid t\in I_0\}\subseteq D$ ist und $\varphi^{(n)}(t)=f(t,\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\dots,\varphi^{(n-1)}(t))$ für alle $t\in I_0$ gilt.

6.2 Definition: Es seien $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall, $D\subseteq\mathbf{K}^n$ offen, $\Omega=I\times D$, $f\in C(\Omega,\mathbf{K}^n)$.

Für ein Intervall $I_0\subseteq I$ heißt $\varphi\in C^1(I_0,\mathbf{K}^n)$ Lösung des <u>Systems von Differentialgleichungen</u>

#2# $\dot{x}=f(t,x)$,

falls $\varphi(I_0)\subseteq D$ und $\dot{\varphi}(t)=f(t,\varphi(t))$ für alle $t\in I_0$ gilt.

Es sei eine Differentialgleichung #1# gegeben.

Setze $X=(x_0,\dots,x_{n-1})$ und definiere

#3# $F\colon \Omega\rightarrow\mathbf{K}^n$, $F(t,X):=(x_1,\dots,x_{n-1},f(t,X))$

6.3 Feststellung

a) Es sei $\varphi\in C^n(I_0,\mathbf{K})$ Lösung von #1#.

Dann ist $\phi=(\varphi,\dot{\varphi},\dots,\varphi^{(n-1)})\in C^1(I_0,\mathbf{K}^n)$ Lösung des Systems

#4# $\dot{X}=F(t,X)$.

b) Es sei $\phi=(\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1})\in C^1(I_0,\mathbf{K}^n)$ eine Lösung von #4#.
Dann gilt $\varphi_j=\varphi_0^{(j)}$ für $j=0,\dots,n-1$, und $\varphi_0\in C^n(I_0,\mathbf{K})$ ist eine Lösung von #1#.

Anfangswertprobleme

#5# $\dot{x}=f(t,x)$, $x(\tau)=\xi$

für Systeme von Differentialgleichungen #2#.

6.4 Satz: Es seien $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall, $D\subseteq\mathbf{K}^n$ offen, $\Omega=I\times D$, $f\in C(\Omega,\mathbf{K}^n)$, $I_0\subseteq I$; $\tau\in I_0$, $\xi\in D$.

Eine Funktion $\varphi\in C^1(I_0,\mathbf{K}^n)$ ist Lösung von #5# $\Leftrightarrow$

#6# $\varphi(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi(s))\,ds$, $t\in I_0$.

#6# ist ein Fixpunktproblem für den Integraloperator

#7# $T:\ \varphi\mapsto\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi(s))\,ds$

6.5 Theorem (Picard-Lindelöf)

Es seien $J\subseteq\mathbf{R}$ ein kompaktes Intervall, $D\subseteq\mathbf{K}^n$ offen, $\Omega=J\times D$, $(\tau,\xi)\in\Omega$, und $f\in C(\Omega,\mathbf{K}^n)$ erfülle eine <u>Lipschitz-Bedingung</u>

#8# $\exists\, L\geq 0\ \forall x_1,x_2\in D\ \forall t\in J\ \|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leq L\cdot\|x_1-x_2\|$

Im Fall $D=\mathbf{K}^n$ sei $I_0=J$, sonst wähle $b>0$ mit $\overline{K}_b(\xi)\subseteq D$ und setze $I_0=J\cap\overline{K}_\delta(\tau)$, $\delta=b\cdot\|f\|^{-1}_{J\times\overline{K}_b(\xi)}$.

Dann hat das Anfangswertproblem #5# genau eine Lösung $\varphi\in C^1(I_0,\mathbf{K}^n)$.

#9# Im Beweis: „gewichtete Norm" für $L|I_0|\geq 1$: $\|\varphi\|_L:=\sup_{t\in I_0}\|\varphi(t)\|\,e^{-2L\cdot|t-\tau|}$

6.6 Bemerkung, Beispiel

a) Der Beweis von Theorem 6.5. ist konstruktiv:
Starte mit $\varphi_0(t)=\xi\in X$; Lösung ist der gleichmäßige Limes der Iteration:

#10# $\varphi_{n+1}(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi_n(s))\,ds$, $t\in I_0$

#11# Es ist $|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|\leq\frac{L^n}{(n+1)!}\|f\|_{\sup}|t-\tau|^{n+1}$

#12# $\Rightarrow\ \|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|_{\sup}\leq\frac{L^n}{(n+1)!}|I_0|^{n+1}\|f\|_{\sup}$

$\|\varphi-\varphi_n\|_{\sup}\leq e^{L|I_0|}\,\frac{L^n|I_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,\|f\|_{\sup}$

Die Konvergenz $\varphi_n\to\varphi$ ist <u>schneller als linear</u>.

b) In Theorem 6.5. gelte $f\in C^k(\Omega,\mathbf{K}^n)$; dann ist $\varphi\in C^{k+1}(I_0,\mathbf{K}^n)$.

c) <u>Ricatti-Differentialgleichung</u>

#14# $\dot{x}=t^2+x^2$, $x(0)=1$

Anfangswertprobleme mit <u>analytischen</u> Daten besitzen <u>lokal</u> eindeutig bestimmte analytische Lösungen.

Für eine offene Menge $D\subseteq\mathbf{C}^n$ heißt $f\in C^1(D,\mathbf{C}^m)$ <u>holomorph</u>, $f\in P(D,\mathbf{C}^m)$, falls die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten:

#15# $\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)=0$, $j=1,\dots,n$.

6.7 Satz. Es seien $a\in\mathbf{C}$, $d,b>0$, $\xi\in\mathbf{C}^n$ und $G\subseteq\mathbf{C}^{n+1}$ ein Gebiet mit

$R:=\overline{K}_d(a)\times\overline{K}_b(\xi)\subseteq G$

Für $f\in P(G,\mathbf{C}^n)$ besitzt das Anfangswertproblem

#16# $\frac{du}{dz}=f(z,u)$, $u(a)=\xi$, mit $\delta=\min\{\ d, \frac{b}{\|f\|_R}\ \}$ genau eine beschränkte Lösung in $P(K_\delta(a),\mathbf{C}^n)$.

Im Beweis die hier nicht näher erwähnten Nummern #17#,#18#,#19#.

Bezeichnung: $P^\infty(K_\delta(a),\mathbf{C}^n)$ - Raum der beschränkten holomorphen Funktionen auf $K_\delta(a)$

6.8 Bemerkung

a) In der Situation von Theorem 6.5 oder Satz 6.7 hänge $f=f(t,x,\lambda)$ noch <u>stetig</u> oder <u>holomorph</u> von $\lambda\in\Lambda\subseteq\mathbf{K}^m$ ab. Die Lipschitz-Konstante L aus #8# sei über kompakten Teilmengen $K\subseteq\Lambda$ unabhängig von $\lambda\in K$.
Dann konvergieren die Iterationen #10# gleichmäßig in $\lambda\in K$, und die Lösung $\varphi(t,\lambda)$ bzw. $u(z,\lambda)$ ist stetig bzw. holomorph in λ.

b) In der Situation von Theorem 6.5 hänge die Lösung $\varphi(t,x,\xi)$ <u>lokal</u> stetig von τ und ξ ab.

#22# Zurückführung auf a): Setze $\Psi:=-\xi+\varphi(\tau+t)$

#23# $\Rightarrow\ \Psi(0)=0 \quad , \ \dot\Psi=f(\tau+t,\Psi+\xi)$

ist Anfangswertproblem #5# mit festen Anfangsdaten $\tau=0$, $\xi=0$ und <u>Parametern</u> τ,ξ.

6.9 Beispiel: Ricatti-Differentialgleichung

$\dot x = t^2 + x^2 \quad , \ x(0)=1$ #14#

Potenzreihenansatz: $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ (klappt, wegen Holomorphie)

7. Maximale Lösungen

7.1 Definition: Es seien $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall, $D\subseteq\mathbf{K}^n$ offen und $\Omega=I\times D$.
Eine Abbildung $f\in C(\Omega,\mathbf{K}^n)$ heißt <u>lokal Lipschitz-stetig bzgl. x</u> ($\in D$), falls jeder Punkt $(t_0,x_0)\in\Omega$ eine Umgebung $J\times K\subseteq\Omega$ hat, auf der f eine Lipschitz-Bedingung (#6.8#) erfüllt.

$\| f(t,x_1)-f(t,x_2)\| \le L\cdot\| x_1-x_2\|$, $t\in J$, $x\in K$. (#6.8#)

7.2 Feststellung: Es sei $f\in C(\Omega,\mathbf{K}^n)$, so daß $\partial x_1 f,\dots,\partial x_n f$ stetig auf Ω existieren.
Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bzgl. x.

#1# Im Beweis: $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\le\|D_x f\|_{J\times K}\cdot\|x_1-x_2\|$

7.3 Satz: Es seien $I=]a,b[\subseteq\mathbf{R}$, $D\subseteq\mathbf{K}^n$ offen, $\Omega=I\times D$, $f\in C(\Omega,\mathbf{K}^n)$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. x.
Für $(\tau,\xi)\in\Omega$ gibt es ein offenes Intervall I_0 mit $\tau\in I_0\subseteq I$, so daß das Anfangswertproblem (#6.5#)

#2# $\dot x=f(t,x) \quad , \ x(t)=\xi$

genau eine Lösung $\varphi\in C^1(I_0,\mathbf{K}^n)$ hat.

7.4 Definition: Eine <u>Lösung</u> oder <u>Integralkurve</u> $\varphi^*\colon I^*\to\mathbf{K}^n$ (mit $I^*\subseteq I$) des Systems $\dot x=f(t,x)$ oder des Anfangswertproblemes #2# heißt <u>maximal</u>, falls sie als solche nicht auf ein größeres Intervall fortsetzbar ist.

7.5 Satz: In der Situation von Satz 7.3 hat das Anfangswertproblem #2# genau eine maximale Lösung.

7.6 Satz: In der Situation von 7.3 sei $\varphi^*\colon]a^*,b^*[\ \to\mathbf{K}^n$ eine maximale Lösung des Systems $\dot x=f(t,x)$.
Ist $b^*<b$, so ist für alle $\varepsilon>0$ die Menge

$\{\ \varphi^*(t)\mid b^*-\varepsilon\le t<b^*\ \}$

in keiner kompakten Teilmenge von D enthalten.

(Anmerkung: Lösung entweder unbeschränkt oder gegen Rand der Definitionsmenge laufend)

Eine analoge Aussage gilt für a*.

Glattheit der Lösung $\not\Rightarrow$ Lebensdauer der Lösung

7.7 Lemma (Gronwall)

Es seien I⊆**R** ein Intervall, g∈C(I) mit g≥0 auf I.

Es gebe τ∈I und A,B≥0 mit

#3# $$g(t) \leq A \cdot \left| \int_\tau^t g(s)\, ds \right| + B \qquad \text{für } t \in I.$$

Dann folgt

#4# $g(t) \leq B \cdot e^{A|t-\tau|}$ für t∈I.

7.8 Satz: In der Situation von 7.3 mit D=$\mathbf{K}^n$ gelte die Abschätzung

#5# $\|f(t,x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t)$, $(t,x) \in I \times \mathbf{K}^n$

mit Funktionen α,β∈C(I,[0,∝[).

Für jede maximale Lösung φ*: I* → $\mathbf{K}^n$ des Systems $\dot{x} = f(t,x)$ gilt dann I*=I.

8. Autonome Systeme

#1# $\dot{x}$=v(x) , v lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld, v∈C(D,$\mathbf{K}^n$)

maximale Lösungen, maximale Integralkurven

8.1 Feststellung: Es sei φ: I → D maximale Integralkurve von #1#

43

a) Für c∈**R** ist auch φ_c: I+c → $\mathbf{K}^n$
$\varphi_c(t) := \varphi(t-c)$, maximale Integralkurve von v.

b) Ist auch ψ: J → $\mathbf{K}^n$ eine maximale Integralkurve von v und gilt ψ(b)=φ(a) für ein b∈J und a∈I, so ist J=I+(b-a) und ψ=φ_{b-a}.

Die Spuren der maximalen Integralkurven bilden disjunkte Zerlegung des Phasenraumes D.

8.2 Satz. Sei v∈C(D,$\mathbf{K}^n$) lokal Lipschitz-stetig (etwa v∈$C^1(D,\mathbf{K}^n)$).

Durch jeden Punkt von D läuft eine bis auf Zeitverschiebung eindeutige maximale Integralkurve φ: I → D von v.

Es trifft genau einer dieser 3 Fälle zu:

a) ∃ τ∈I mit $\dot{\varphi}(\tau)$=0.
Für ξ:=φ(τ) gilt dann v(ξ)=0, d.h. ξ ist ein <u>stationärer</u> Punkt von v.
Es folgt I=**R** und φ(t)=ξ für alle t∈**R**.

b) Es ist $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ für alle t∈I, und φ hat einen Doppelpunkt, d.h.
∃ a<b∈I mit φ(a)=φ(b).
Dann ist I=**R** und φ ist periodisch mit Periode p=b-a.

c) Stets gilt $\dot{\varphi}(\tau) \neq 0$, und φ hat keinen Doppelpunkt.

8.3 Satz: Eine nicht konstante periodische Funktion φ: **R** → $\mathbf{K}^n$ hat eine <u>minimale</u> Periode p>0, und p**Z** ist die Menge aller Perioden von φ.

8.4 Satz: Es seien v∈C(D,$\mathbf{K}^n$) lokal Lipschitz-stetig und Γ⊆D eine glatte C^1-geschlossene Jordankurve mit v(x)≠0 für x∈Γ.

Für eine maximale Lösung φ: I → D von #1# mit φ(I)⊆Γ gilt:

a) I=**R**

b) φ ist periodisch

c) φ(**R**)=Γ

Bemerkung zu 8.4: φ hat keine „Umkehrpunkte“, sonst hätte φ beliebig kleine Perioden.

#2# 8.5 Beispiel: Für α∈**R** sei $v(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2,-x_1,\alpha\cdot x_4,-\alpha\cdot x_2)^T$

#3# Lösungen: $\varphi(t)=(r\cdot\cos(t), r\cdot\sin(t), \rho\cdot\cos(\alpha t), \rho\cdot\sin(\alpha t))^T$

Für r=ρ=1:
$\varphi(t)\in T^2:=S^1\times S^1$ (Torus)
Für $\alpha\notin\mathbf{Q}$ ist φ nicht periodisch.
Es ist $\varphi(\mathbf{R})$ dicht in T^2.

#4# 8.6 Beispiel: $v(x,y)=\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}+(1-x^2-y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
stationärer Punkt: (0,0).
Ansatz in Polarkoordinaten: $(x(t),y(t))=r(t)(\cos\varphi(t),\sin\varphi(t))$
Somit: $\dot\varphi=1$, $\dot r=r(1-r^2)$
Anmerkung: Durch jeden Punkt der Ebene geht eine solche Lösung
$\Rightarrow$ Man hat alle Lösungen gefunden!

9. Lineare Differentialgleichungen

Lineare Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung
#1# $\dot x(t)=A(t)x+b(t)$, $A\in C(I,N_{\mathbf{C}}(n))$, $b\in C(I,\mathbf{C}^n)$
9.1 Satz: Es seien $I\subseteq\mathbf{R}$ ein Intervall, $\tau\in I$, $\xi\in\mathbf{C}^n$, $A\in C(I,N_{\mathbf{C}}(n))$ und $b\in C(I,\mathbf{C}^n)$.
Dann hat das Anfangswertproblem
#2# $\dot x(t)=A(t)x+b(t)$, $x(\tau)=\xi$
genau eine Lösung $\varphi\in C^1(I,\mathbf{C}^n)$.
Anmerkung: Lösung lebt bei linearen Differentialgleichungen immer auf dem Intervall, auf dem die Gleichung lebt.

Homogene Systeme

#3# $\dot x(t)=A(t)x$
9.2 Satz
a) Für Lösungen $\varphi_1,\dots,\varphi_r\in C^1(I,\mathbf{C}^n)$ von #3# sind äquivalent:
α) $\varphi_1,\dots,\varphi_r$ sind linear unabhängig in $C^1(I,\mathbf{C}^n)$
β) $\forall\, t\in I$: $\varphi_1(t),\dots,\varphi_r(t)$ sind linear unabhängig in $\mathbf{C}^n$
γ) $\exists\, t_0\in I$: $\varphi_1(t_0),\dots,\varphi_r(t_0)$ sind linear unabhängig in $\mathbf{C}^n$
b) $L(A)=\{\varphi\in C^1(I,\mathbf{C}^n)\mid\dot\varphi(t)=A(t)\cdot\varphi(t),\ t\in I\}$ ist ein Vektorraum der Dimension n.
im Beweis zu b): es existieren Lösungen des Anfangswertproblems
#4# $\dot x=A(t)x$, $x(\tau)=e_j$ $j=1,\dots,n$.
Diese sind linear unabhängig.
9.3 Definition: Es sei $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ eine Basis von L(A).
Dann heißt die Matrix-Funktion
#5# $\phi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in C^1(I,N_{\mathbf{C}}(n))$
ein Fundamentalsystem (FS) von #3#.
9.4 Bemerkung
a) Es sei $\phi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ ein Fundamentalsystem von #3#.
#6# $L(A)=\{\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j\mid c_j\in\mathbf{C}\}=\{\phi(t)c\mid c\in\mathbf{C}^n\}$.
b) Es seien $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in L(A)$
$\Rightarrow$ Die Matrix φ aus #5# löst die Matrix-Differentialgleichung
#7# $\dot X=A(t)X$
c) Es sei ϕ_0 ein festes Fundamentalsystem von #3#.
Dann sind alle Lösungen von #7# gegeben durch
#8# $\phi(t)=\phi_0(t)C$, $C\in N_{\mathbf{C}}(n)$.

9.5 Definition: Für eine Lösung $\phi \in C^1(I, N_{\mathbf{C}}(n))$ von #7# heißt

$$W = W_\phi = \det \phi$$

die <u>Wronski-Determinante</u> von ϕ.

9.6 Satz von Liouville: Für $W = W_\phi$ gilt die Differentialgleichung

#9# $$\dot W(t) = \mathrm{spur}A(t) \cdot W(t)$$

Es folgt mit $W(\tau) = \xi$:

$$W(t) = \xi \exp\left(\int_\tau^t spurA(s)\, ds\right)$$

Ist $\mathrm{spur}A(t)=0$, so ist W konstant (Beispiel: $A(t)=-A(t)$)

Inhomogene Systeme

$$\dot x = A(t)x + b(t)$$

Variation der Konstanten: Es sei ϕ ein Fundamentalsystem von #3#.

<u>Ansatz</u>: $\varphi(t) = \phi(t)c(t)$

Dann: $\dot\varphi = \phi^{-1}b$

9.7 Satz: Für ein Fundamentalsystem ϕ von #3# und $\tau \in I$ ist

#10# $$\psi_0(t) = \phi(t)\int_\tau^t \phi^{-1}(s)b(s)\, ds \quad , t \in I$$

die Lösung von #1# mit $\psi_0(\tau)=0$.

Alle Lösungen von #1# sind dann gegeben durch

$$\psi(t) = \psi_0(t) + \phi(t)c \qquad , c \in \mathbf{C}^n.$$

Lineare Differentialoperatoren

#11# $Lx := x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\dot x + a_0(t)x$

$$a_0, \ldots, a_{n-1} \in C(I, \mathbf{C}) \qquad , b \in C(I, \mathbf{C})$$

$Lx = b \iff x^{(n)} = -a_{n-1}(t)x^{(n-1)} - \ldots - a_1(t)\dot x - a_0(t)x + b(t) = f(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$

Für $X = (x, \dot x, \ldots, x^{(n-1)})^T$ ist dies äquivalent zu dem System

$$\dot X = F(t,X) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(t,X)) \text{ , } X = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \qquad \text{(vgl. \#6.3\#)}$$

#12# $\Rightarrow \dot X = A(t)X + B(t)$, wobei

#13# $$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

9.8 Bemerkung

a) Es ist $L\varphi = b \iff (\varphi, \dot\varphi, \ldots, \varphi^{(n-1)}) =: \varphi^*$ löst #12#.

b) Es ist $\dim N(L) = \dim\{ \varphi \in C^n(I) \mid L\varphi = 0 \} = n$.
Wronski-Determinante

#14# $$W(t) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in N(L)$.

Es ist $\mathrm{spur}A(t) = -a_{n-1}(t)$

#15# $\Rightarrow \; W(t) = W(\tau)\exp(-\int_\tau^t a_{n-1}(s)\, ds)$.

c) Es sei $W_k(t)=(-1)^{k+n}W(\varphi_1,...,\hat{\varphi}_k,...,\varphi_n)$ die Determinante, die durch Ersetzen der k-ten Spalte in $W(\varphi_1,...,\varphi_n)$ durch $e_n=(0,...0,1)^T$ entsteht.

9.9 Satz: Es seien $\varphi_1,...,\varphi_n$ linear unabhängige Lösungen von Lx=0 in $C^n(I)$.
Dann ist eine Lösung von Lx=b gegeben durch

#16# $$\psi_0(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \int_\tau^t \tfrac{W_k(s)}{W(s)} b(s)\, ds$$

10. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

#1# $\dot{X} = AX \qquad , X(0)=I$

Picard-Iteration (#6.10#) kann explizit durchgeführt werden:

$$\phi_0 = I \;\Rightarrow\; \phi_n(t) = \sum_{k=0}^n \tfrac{1}{k!}(At)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{At}$$

10.1 Definition: Für $A \in N_{\mathbf{C}}(n)$ oder $A \in L(\mathbf{K}^n)$ sei

#3# $$e^A = \sum_{k=0}^\infty \tfrac{1}{k!} A^k \in N_{\mathbf{C}}(n), L(\mathbf{K}^n)$$

10.2 Bemerkung

a) $\|A^k\| \le \|A\|^k \;\Rightarrow$ man hat absolute Konvergenz in #3#

b) $e^A = \lim_{n\to\infty}(I + \tfrac{A}{n})^n$

c) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B \qquad$, falls $A\cdot B = B\cdot A$

d) $e^A \in GL_{\mathbf{C}}(n)$

#4# e) $A \in N_{\mathbf{K}}(n)$, $t \in \mathbf{K} \;\Rightarrow\; \tfrac{d}{dt} e^{At} = e^{At}\cdot A = A\cdot e^{At}$

10.3 Feststellung: Für $A \in N_{\mathbf{C}}(n)$ ist $\phi(t) = e^{At}$ das Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$ mit $\phi(0)=I$.

#5# 10.4 Anwendung: Für $A \in N_{\mathbf{C}}(n)$ gilt: $\det e^A = e^{\operatorname{spur} A}$

10.5 Bemerkung

a) Zur Berechnung von e^{At} transformiere $A \in N_{\mathbf{C}}(n)$ mittels $S \in GL_{\mathbf{C}}(n)$ zu
$J = S^{-1}AS$
$\Rightarrow\; e^{Jt} = S^{-1}e^{At}S$

b) Es sei A <u>diagonalisierbar</u>, dann $J = \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$, $S = (v_1,...,v_n)$
$Av_j = \lambda_j v_j$
$$e^{Jt} = diag(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$$
Ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$ ist:

#6# $$e^{At}S = diag(v_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, v_n e^{\lambda_n t})$$

c) <u>Allgemeiner Fall</u>: J Jordan-Matrix, d.h. $J = \mathrm{diag}(J_0,...,J_q)$, $J_0 = \mathrm{diag}(\mu_1,...,\mu_p)$,
J_i habe Größe r_i.
$\mu_1,...,\mu_p,\lambda_1,...,\lambda_q$ sind Eigenwerte von A (nicht notwendig verschieden) und es ist $p+r_1+...+r_q=n$.
Man hat $e^{Jt} = diag(e^{J_0 t}, \ldots, e^{J_q t}) \quad , \; e^{J_0 t} = diag(e^{\mu_1 t}, \ldots, e^{\mu_p t})$

d) $J_i = \lambda_i I + N_i \qquad , \; N_i = (\delta_{k+1,j})_{k,j=1}^{r_i}$

#8# $$e^{N_i t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \cdot e^{N_i t}$$

#9# Schreibe $S = (v_1^0, \dots, v_q^0; v_1^1, \dots, v_{r_1}^1; \dots; v_1^q, \dots, v_{r_q}^q)$

Insgesamt:

#10# $$\begin{cases} (A-\mu_1 I)v_1^0 = 0, \dots, (A-\mu_p I)v_p^0 = 0 \\ (A-\lambda_1 I)v_1^1 = 0, (A-\lambda_1 I)v_2^1 = v_1^1, \dots, (A-\lambda_1 I)v_{r_1}^1 = v_{r_1-1}^1 \\ \vdots \\ (A-\lambda_q I)v_1^q = 0, (A-\lambda_q I)v_2^q = v_1^q, \dots, (A-\lambda_q I)v_{r_q}^q = v_{r_q-1}^q \end{cases}$$

$v_1^0, \dots, v_p^0$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\mu_1, \dots, \mu_p$.

$v_1^i, \dots, v_{r_i}^i$ Jordanketten zu den Eigenwerten λ_i.

Durch Lösung der Gleichungen #10# können S und J berechnet werden; die Gleichungen $(A-\lambda_i I)x = v_{r_i}^i$ sind <u>nicht</u> lösbar.

10.6 Theorem: Die Matrix $A \in N_C(n)$ besitze die Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_p, \lambda_1, \dots, \lambda_q$ und das System #9# von Eigenvektoren und Hauptvektoren gemäß #10#. Dann ist ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$ gegeben durch

$$\phi = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_p^0, \varphi_1^1, \dots, \varphi_{r_1}^1, \dots, \varphi_1^q, \dots, \varphi_{r_q}^q)$$

#11# $$\begin{cases} \varphi_1^0 = e^{\mu_1 t} v_1^0, \dots, \varphi_p^0 = e^{\mu_p t} v_p^0 \\ \varphi_1^1 = e^{\lambda_1 t} v_1^1, \varphi_2^1 = e^{\lambda_1 t}(tv_1^1 + v_2^1), \dots, \varphi_{r_1}^1 = e^{\lambda_1 t} \sum_{l=0}^{r_1-1} \frac{t^l}{l!} v_{r_1-l}^1 \\ \vdots \\ \varphi_1^q = e^{\lambda_q t} v_1^q, \varphi_2^q = e^{\lambda_q t}(tv_1^q + v_2^q), \dots, \varphi_{r_q}^q = e^{\lambda_q t} \sum_{l=0}^{r_q-1} \frac{t^l}{l!} v_{r_q-l}^q \end{cases}$$

Bemerkung: $e^{At} \to 0$ für $t \to \propto$, falls $\mathrm{Re}\mu_j$, $\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \ \forall\ j$.

10.7 Beispiel

Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

#12# $Lx := x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$

$\Rightarrow$ Umschreiben auf System gemäß #9.13#.

charakteristische Polynom

#13# $P_L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

10.8 Satz: Es sei $P_L(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$ die Zerlegung von P_L in Linearfaktoren.

Dann sind n linear unabhängige Lösungen von Lx=0 gegeben durch

#14# $$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \dots, t^{m_r-1}e^{\lambda_r t}.$$

Inhomogene Differentialgleichungen

Variation der Konstanten (Satz 9.7) oder spezielle Ansätze (siehe Abschnitt 5)

11. Stabilität

Autonome Systeme

#1# $\dot{x}$=v(x)

in der Nähe eines singulären, kritischen oder stationären Punktes $x_0 \in D$, d.h. $v(x_0)=0$.

(Physik: Ruhelage des Systems)

Untersuche Lösungen von $\dot{x}$=v(x) mit x(0)=ξ, ξ <u>nahe</u> x_0.

11.1 Feststellung: Es seien $D \subseteq \mathbf{R}^n$ offen, $v \in C^1(D,\mathbf{R}^n)$, φ:]a,b[→ D maximale Lösung von #1#.

Gilt $\lim_{t \to b^-} \varphi(t)=x_0 \in D$, so folgt $b=\infty$ und $v(x_0)=0$.

11.2 Definition: Es sei x_0 stationärer Punkt von $v \in C^1(D,\mathbf{R}^n)$.

a) x_0 heißt <u>stabil</u>, falls zu jeder Umgebung $U \subseteq D$ von x_0 eine Umgebung $V \subseteq D$ von x_0 existiert, so daß gilt:
   Für jede maximale Lösung φ:]a,b[→ D von #1# mit $\varphi(0) \in V$ gilt $b=\infty$ und $\varphi(t) \in U$ für $0 \le t < \infty$.

b) x_0 heißt asymptotisch stabil oder <u>Attraktor</u>, falls x_0 stabil ist und für φ wie in a) noch gilt $\lim_{t \to \infty} \varphi(t)=x_0$.

(In manchen Büchern bedeuten die Begriffe aus b) <u>nicht</u> dasselbe.)

11.3 Beispiel: v: **R** → **R**, $v(x)=-x^p$, $p \in \mathbf{N}$

stationärer Punkt: $x_0=0$

p ungerade: 0 Attraktor

p gerade: 0 nicht stabil

Bemerkung:

x_0 Attraktor: anziehend

x_0 nicht stabil: abstoßend (in gewissem Sinne)

Definition: Der Eigenwert λ heißt halbeinfach, falls

algebraische Vielfachheit=geometrische Vielfachheit

11.4 Beispiel: Lineares Vektorfeld v(x)=Ax, $A \in N_{\mathbf{R}}(n)$, $D=\mathbf{R}^n$,

$x_0=0$ ist kritischer Punkt

#2# $\dot{x}$=Ax, x(0)=ξ

#3# Lösung: $\varphi(t)=e^{At}\xi$

a) Es gelte stets $\mathrm{Re}\lambda_j \le 0$ und λ_j sei halbeinfach für $\mathrm{Re}\lambda_j=0$.
   Dann gilt
   $\| e^{At} \| \le c$ für $t \ge 0$
   ⇒ 0 ist stabil für $\dot{x}$=Ax

b) Sei $\mathrm{Re}\lambda_j<0$ für alle Eigenwerte.
   ⇒ 0 ist Attraktor

11.5 Theorem (Poincaré-Ljapunov)

Es sei x_0 stationärer Punkt von $v \in C^1(D,\mathbf{R}^n)$ und $A:=Dv(x_0)$.

Gilt Reλ<0 für alle Eigenwerte λ von A, so ist x_0 ein Attraktor von v.

Grundidee: $\dot{x}$=v(x) nahe x_0 → $\dot{x}=Dv(x_0)x$

Linearisierung

d.h. System durch seine Linearisierung ersetzen.

Kriterium von Routh-Hurwitz: $P(\lambda)=a_n\lambda^n+\ldots+a_1\lambda+a_0$ mit $a_n>0$

$\forall$ j: $\mathrm{Re}\lambda_j<0$ ⇔ Alle Haupt-Minoren der Matrix $(a_{n-2i+j})_{1\le i,j\le n}$ sind >0

11.6 Beispiel: Linear gedämpftes mathematisches Pendel

#10# $\ddot{x}+\rho\dot{x}+\sin x=0$ (ρ>0)

Bei Umschreibung auf System: (0,0) ist Attraktor

11.7 Beispiel: Es sei v=-grad g, $g\in C^2(D,\mathbf{R})$

Dv=-Hg Hesse-Matrix

Es gelte grad $g(x_0)=0$, $Hg(x_0)>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \text{ ist isoliertes lokales Minimum von g} \\ x_0 \text{ ist ein Attraktor für } \dot{x} = v(x) \end{cases}$$

Bemerkung

a) In geeigneten Koordinaten gilt

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{0j})^2 \text{ (Morse Lemma, gilt für } C^2\text{-Funktionen)}$$

b) „Richtungsableitung" von g in Richtung v

$\partial_v g := \langle v, \text{grad } g\rangle = Dg \circ v = -\|v\|^2 < 0$, $x \neq x_0$ mit x nahe x_0

11.8 Definition: Es sei $x_0\in D$ stationärer Punkt von $v\in C^1(D,\mathbf{R}^n)$.

Eine Funktion $L\in C^1(D,\mathbf{R})$ heißt Ljapunov-Funktion zu v und zu x_0, falls folgendes gilt:

(a) L hat ein isoliertes lokales Minimum in x_0 mit $L(x_0)=0$

(b) $\partial_v L = \langle v, \text{grad } L\rangle = DL \circ v \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$ auf D.

11.9 Beispiel, Bemerkung

a) In 11.7 kann man L=g nehmen.

b) $v(x)=-x^p$ auf $\mathbf{R}$, p ungerade

Setze $L(x)=x^2$

c) $L\in C^1(D,\mathbf{R})$ heißt <u>erstes Integral</u> von v, falls $\partial_v L=0$ ist.

L ist also Ljapunov-Funktion, falls (a) gilt.

d) System 2. Ordnung

$\ddot{x} = -grad\, U$ (System der Größe n)

$\Rightarrow$ System 1. Ordnung der Größe 2n, $\dot{x} = y$

#12# $$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} y \\ -grad\, U(x) \end{pmatrix}$$

Erstes Integral:

Energie $E=\frac{1}{2}\|y\|^2+U(x)$

Gilt $U(x_0)=0$ und hat U ein isoliertes lokales Minimum in x_0, so hat E ein isoliertes lokales Minimum in $(0,x_0)$ mit $E(0,x_0)=0$

$\Rightarrow$ E ist Ljapunov-Funktion für #12# in $(0,x_0)$.

e) Sei φ Lösung von $\dot{x} = v(x)$

$$\frac{d}{dt} L(\varphi(t)) = \partial_v L(\varphi(t)) \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \end{cases}$$

Fall ≤0: L ist auf den Lösungen monoton fallend

Fall ≥0: L ist auf den Lösungen monoton steigend

11.10 Theorem (Ljapunov)

Es seien $x_0\in D$ stationärer Punkt von $v\in C^1(D,\mathbf{R}^n)$ und L eine Ljapunov-Funktion zu v und x_0.

a) $\partial_v L\leq 0$ auf D $\Rightarrow$ x_0 ist stabil

b) $\partial_v L<0$ auf $D\setminus\{x_0\}$ $\Rightarrow$ x_0 ist Attraktor

c) $\partial_v L>0$ auf $D\setminus\{x_0\}$ $\Rightarrow$ x_0 ist nicht stabil

Bemerkung: 11.5 läßt sich aus 11.10 folgern.

11.11 Definition: Es sei x_0 ein Attraktor zu $\dot{x} = v(x)$.

Die Menge

$E(x_0)=\{ \xi\in D \mid \lim_{t\to\infty} \varphi(t)=x_0$ für die Lösung φ von $\dot{x} = v(x)$, $\varphi(0)=\xi \}$

heißt Einzugsbereich von x_0.

x_0 heißt globaler Attraktor, falls $E(x_0)=D$.

11.12 Bemerkung: Es sei L Ljapunov-Funktion mit $\partial_v L<0$ auf $D\setminus\{x_0\}$.

Für $\mu>0$ sei $K_\mu=\{ x\in D \mid L(x)\le\mu \}$ kompakt

$\Rightarrow$ $V=\{ x\in D \mid L(x)<\mu \}\subseteq E(x_0)$

Sind alle K_μ kompakt, so ist x_0 globaler Attraktor.

11.13 Beispiel

a) $v(x)=-x^p$, p ungerade, $L(x):=\frac{1}{2}x^2$ $\Rightarrow$ 0 ist globaler Attraktor

b) $\dot{x} = ax - y + kx(x^2+y^2)$, $a,k\in\mathbf{R}$, $a^2<1$

$\dot{y} = x - ay + ky(x^2+y^2)$

$\Rightarrow$ k<0: Nullpunkt ist Attraktor

k=0: Nullpunkt ist stabil

k>0: Nullpunkt ist instabil

c) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$ Liénard-Gleichung

z.B.: $f(x)=\mu(x^2-1)$ Van der Pol-Gleichung

$f(0)>0$ oder $f(x)>0$ für $x\neq 0$ $\Rightarrow$ Nullpunkt ist Attraktor

$f(x)\ge 0\ \forall x$ $\Rightarrow$ Nullpunkt ist stabil

$f(x)<0$ für $x\neq 0$ $\Rightarrow$ Nullpunkt ist instabil

12. Flüsse

12.1 Definition: Es seien $D\subseteq\mathbf{R}^n$ offen, $v\in C^1(D,\mathbf{R}^n)$,

#1# $\varphi(t,\xi)=\varphi_t(\xi)=\varphi^\xi(t)$

die maximale Lösung des Anfangswertproblems

#2# $\dot{x} = v(x)$, $x(0)=\xi\in D$

φ^ξ lebt auf $I^\xi=]t^-(\xi),t^+(\xi)[$ mit $0\in I^\xi$.

Die Funktion φ ist definiert auf

#3# $\Omega=\{ (t,\xi) \mid \xi\in D,\ t^-(\xi)<t<t^+(\xi) \}\subseteq\mathbf{R}\times D$

und heißt der von v erzeugte (lokale) Fluß.

Ω ist „Normalbereich", vgl. AnA II.

φ heißt globaler Fluß, falls $\Omega=\mathbf{R}\times D$.

12.2 Beispiel

a) $v(x)=Ax$, $A\in N_{\mathbf{R}}(n)$

$\Rightarrow$ $\varphi(t,\xi)=e^{At}\xi$ globaler Fluß auf $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$.

Lösung von $\dot{x} = Ax$ invertierbare linare Abbildung des $\mathbf{R}^n$.

#4# $\varphi_{t+s}=\varphi_t\circ\varphi_s$ Operatorgruppe

Anmerkung: Wronski-Determinate von $e^{At} = 1$ $\Leftrightarrow$ „flächentreu" (Flächeninhalte bleiben gleich)

b) Für allgemeine $v\in C^1(D,\mathbf{R}^n)$ gilt

#5# $\varphi_{t+s}(\xi)=\varphi_t(\varphi_s(\xi))$

falls beide Seiten definiert sind.

c) Auf $D=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}=\mathbf{C}\setminus\{(0,0)\}$ sei

#6# $v(x,y) = \frac{1}{r}(-y,x) = \frac{1}{|z|}iz$ $(r=|(x,y)|)$

#7# $\varphi_t(z) = z\,e^{\frac{it}{|z|}}$ globaler Fluß alle φ_t sind Diffeomorphismen von D und „flächentreu“

12.3 Satz: Für $\xi_0 \in D$ sei $0<b<t^+(\xi_0)$, d.h. die Lösung $\varphi = \varphi^{\xi_0}$ des Anfangswertproblems #2# lebe auf [0,b].

Dann existiert r>0, L>0, so daß für $\xi \in K_r(\xi_0)$ auch φ^ξ auf [0,b] lebt und folgendes gilt:

#8# $$|\varphi^\xi(t)-\varphi^\eta(t)| \le |\xi-\eta| e^{Lt} \qquad , \xi,\eta \in K_r(\xi_0),\ t \in [0,b]$$

12.4 Folgerung

a) Die Menge Ω aus #3# ist offen in $\mathbf{R}\times D$.

b) Zu einer kompakten Menge $K \subseteq D$ existiert c>0 mit $[0,c]\times K \subseteq D$

12.5 Bemerkung

Es sei φ differenzierbar nach ξ. Dann „folgt“:

$$\partial_t\varphi(t,\xi)=v(\varphi(t,\xi))$$

$$\partial_t D_\xi\varphi(t,\xi)=Dv(\varphi(t,\xi))D_\xi\varphi(t,\xi)$$

#16# Setze $A(t)=A^\xi(t)=Dv(\varphi(t,\xi))$

Dann erfüllt $t \mapsto D_\xi\varphi(t,\xi)$ die Variationsgleichung

#17# $$\dot{X} = A(t)X \ ,\ X(0)=I$$

Das Anfangswertproblem #17# hat eindeutige Lösung

$$B(t)=B^\xi(t) \in C^1(I^\xi, N_{\mathbf{R}}(n))$$

12.6 Theorem: Für $v \in C^1(D,\mathbf{R}^n)$ ist der lokale Fluß $\varphi: \Omega \to D$ stetig differenzierbar.

Für $(t,\xi) \in \Omega$ ist $D_\xi\varphi(t,\xi)=B^\xi(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems #17#.

Ist $U \subseteq D$ offen mit $\{t\}\times U \subseteq \Omega$, so ist $\varphi_t: U \to \varphi_t(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus.

12.7 Folgerung: $v \in C^1(D,\mathbf{R}^n)$ erzeuge einen globalen Fluß, d.h. $\Omega=\mathbf{R}\times D$.

Dann sind alle $\varphi_t: D \to D$ Diffeomorphismen von D auf D, und

#22# $$\varphi_{t+s}=\varphi_t \circ \varphi_s \qquad , t,s \in \mathbf{R}$$

Anschaulich:

ξ fest:	Teilchen fließt (man sieht den Weg)	(Frage: Wo lang?)
t fest:	Alle Teilchen am Ort zum Zeitpunkt t	(Frage: Wie verändert zum Anfangsort?)

12.8 Bemerkung

#23# a) Allgemein sei $\dot{x} = f(t,x,\lambda) \qquad , x(\tau)=\xi$

Für $y(t):=x(t+\tau)$ gilt

$$\dot{y} = f(t+\tau,x,\lambda) \ ,\ y(0)=\xi.$$

Man kann also τ als Parameter auffassen; dann $\tau=0$ in #23#.

Erweitere #23# durch

#24# $$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,\lambda) & , x(0)=\xi \\ \dot{t} = 1 & , t(0)=0 \\ \dot{\lambda} = 0 & , \lambda(0)=\lambda \end{cases} \quad \text{autonomes System}$$

b) $f \in C^k \Rightarrow \varphi \in C^k$

12.9 Bemerkung

a) Betrachte Jacobi-Determinante

#25# $$J^\xi(t):=\det D_\xi\varphi(t,\xi)$$

Es ist

#27# $$spur Dv(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j(x) = div\, v(x)$$

die Divergenz von v(x).

#28# $\dot{J}^{\xi}(0)=\text{div } v(\xi)$

ist die Änderungsgeschwindigkeit zur Zeit t=0 von $J^{\xi}(t)=\det D_{\xi}\varphi(t,\xi)$.
Es ist $D_{\xi}\varphi(t,\xi)$ die lineare Approximation an den Diffeomorphismus φ_t in ξ.
$\det D_{\xi}\varphi(t,\xi)$: infinitesimale Volumenverzerrung durch φ_t im Punkte ξ.

b) Sei $K\subseteq D$ kompakt, $[0,c]\times K\subseteq\Omega$, für $t\in[0,c]$:

#29# $m(\varphi_t(K))=\int_K J_t(\xi)\, d\xi$ Transformationsformel

Also: φ volumentreu
:$\Leftrightarrow$ $m(\varphi_t(K))=m(K)$ für alle t und K
$\Leftrightarrow$ $J_t(\xi)=1$ für alle ξ und t

#30# $\Leftrightarrow$ $\text{div } v(\xi)=0$ für alle ξ

c) v aus 12.2 b): $\text{div } v(x,y)=0$

d) Mechanik: System von n Teilchen eird beschrieben durch eine Hamilton-Funktion von je 3n Orts- und Impulskoordinaten x_j,y_j.

#31# $$H(x,y)=\sum_{j=1}^{3n}\frac{y_j^2}{2m_j}+U(x) \qquad , U\in C^2$$

$\Rightarrow$ div H(x,y)=0
$\Rightarrow$ Hamiltonsche Fluß ist volumentreu.

12.10 Bemerkung

a) In der Situation von 12.9 a) gelte $v|_{\partial K}=0$.
$\varphi^{\xi}(\tau)\in\partial K \Rightarrow \forall t: \varphi^{\xi}(t)=\varphi^{\xi}(\tau)$
$\xi\in K \Rightarrow \varphi_t(K)=K$

$$\int_K div\, v(\xi)\, d\xi = 0$$

b) Also: $v,w\in C^1(D,\mathbf{R}^n)$, $v|_{\partial K}=w|_{\partial K}$

#33# $\Rightarrow \int_K div\, v(x)\, dx = \int_{\partial K} < v,n > d\sigma$

(Satz von Gauß, falls ∂K „fast überall glatt“/gilt nur für bestimmten Rand)

c) $D\subseteq\mathbf{R}^2$ einfach zusammenhängend, $\varphi=\varphi^{\xi}$ sei eine <u>periodische</u> Lösung von

$$\dot{x}=v(x)\,.$$

Dann ist $\Gamma=(\varphi)$ eine geschlossene Jordan-Kurve in D.

$\Rightarrow \int_K div\, v(x)\, dx = \int_{\partial K=\Gamma} < v,n > d\sigma = 0$

Also:

$$\text{div}\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix} \text{ auf D } \Rightarrow \dot{x}=v(x) \text{ hat } \underline{\text{keine}} \text{ periodische Lösung in D.}$$

13. Schwingende Saiten

13.1 Problem

u(x,t): Auslenkung einer Saite in $x\in[0,l]$ zur Zeit $t\in\mathbf{R}$.
<u>Wellengleichung</u>:

#1# $\partial_t^2 u(x,t)=\frac{1}{\rho(x)}\partial_x^2 u(x,t)$

mit der Massendichte $\rho(x)>0$.

#2# $u(0,t)=u(l,t)=0$, $t\in\mathbf{R}$

Randbedingung

Gegeben sind

#3# $u(x,0)=A(x)$, $\partial_t u(x,0)=B(x)$

mit

$A(0)=A(l)=0$

Gesucht: u(x,t)

13.2 Eigenwerte und Eigenfunktionen

#4# a) Separationsansatz: $u(x,t)=f(x)\cdot g(t)$

b) Ist $g(t_0)\neq 0$: $-\lambda := \frac{\ddot{g}(t_0)}{g(t_0)}$

#5# $\Rightarrow$ $f''(x)=\lambda\rho(x)f(x)=0$, $x\in[0,l]$

#6# $\ddot{g}(t)+\lambda g(t)=0$, $t\in\mathbf{R}$

Randbedingung: $f(0)=f(l)=0$

c) Annahme: $\rho(x)=\rho>0$

Man hat nichttriviale Lösungen für #5# nur für

#8# $\lambda=\lambda_k=\frac{\pi^2}{\rho l^2}k^2$, $k\in\mathbf{N}$

Diese λ_k heißen die Eigenwerte des Problems

#7# $f''(x)=\lambda\rho(x)f(x)=0$, $f(0)=f(l)=0$

Die entsprechenden Eigenfunktionen sind

#9# $\varphi_k(x)=c_k\sin(\frac{\pi}{l}kx)$, $k\in\mathbf{N}$

d) Für $\lambda=\lambda_k$ und $c=\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ sind die Lösungen von #6#:

#10# $g_k(t)=a_k\cos(c\frac{\pi}{l}kt)+b_k\sin(c\frac{\pi}{l}kt)$

Lösungen von #1#, #2#:

#11# $\varphi_k(x,t)=(a_k\cos(c\frac{\pi}{l}kt)+b_k\sin(c\frac{\pi}{l}kt))\sin(\frac{\pi}{l}kx)$

Eigenfunktionen von #1#, #2#.

(c: Frequenz der Grundschwingung)

Ab jetzt: $l=\pi$

13.3 Reihenentwicklungen

a) Suche Lösungen von #1#-#3# durch

#12# $$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos ckt+b_k\sin ckt)\sin kx$$

Es gelte

#13# $$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(|a_k|+|b_k|)<\infty$$

Dann ist $u\in C^2(\mathbf{R}^2)$ eine Lösung von #1# und #2#, und

#14# $$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}ckb_k\sin kx$$

b) Es sei F: $[0,\pi]\to\mathbf{R}$ mit $F(0)=F(\pi)=0$.

F hat ungerade Fortsetzung auf $[-\pi,\pi]$ durch

$F(-x):=-F(x)$, $0\le x\le\pi$,

dann eine 2π-periodische Fortsetzung $\breve{F}$ auf $\mathbf{R}$.

Fourier-Entwicklung:

#15# $$\breve{F}(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}F_k\sin kx \qquad F_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\sin kx\,dx$$

c) Wähle also in #12#: $a_k=A_k$, $b_k=\frac{B_k}{ck}$, $k\in\mathbf{N}$

$\Rightarrow$ Lösung von #1#-#3#

13.4 Lösung des Problems #1#-#3#

a) Sei B=0 und $A\in C^2[0,\pi]$ und

#16# $A(0)=A(\pi)=0$, $A''(0)=A''(\pi)=0$

Dann folgt

#17# $u_A(x,t)=\frac{1}{2}\breve{A}(x+ct)+\frac{1}{2}\breve{A}(x-ct)$

Es gelten: $u_A \in C^2(\mathbf{R}^2)$ und #1#-#3#.

b) Sei A=0, $B \in C^1[0,\pi]$, $B(0)=B(\pi)=0$

#22# $\Rightarrow \; u_B(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\breve{B}(y)\,dy$

Es folgen: $u_B \in C^2(\mathbf{R}^2)$ sowie #1#.

c) Sind A und B wie in a), b) gegeben, so ist u_A+u_B die Lösung von #1#-#3#.

13.5 Bemerkung

a) Man kann #1#-#3# mittels #17# und #22# unmittelbar lösen, ohne Fourier-Entwicklung; diese kann aber auch für allgemeinere Probleme verwendet werden.

b) Schwingende Saiten „unendlicher Länge“:
Alle Lösungen der Wellengleichung #1# auf $\mathbf{R}^2$ sind:

#23# $u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$, $f,g \in C^2(\mathbf{R})$

Für $A \in C^2(\mathbf{R})$, $B \in C^1(\mathbf{R})$ besitzt #1#, #3# die eindeutig bestimmte Lösung:

#24# $u(x,t)=\frac{1}{2}A(x+ct)+\frac{1}{2}A(x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}B(y)\,dy$

Bemerkung

Wellengleichung: Ort und Geschwindigkeit für t=0 bekannt $\Rightarrow$ „Zukunft“ und „Vergangenheit“ errechenbar.
Wärmeleitungsgleichung: Nur „Zukunft“ errechenbar.

14. Sturm-Liouville-Probleme

Es werden symmetrische Sturm-Liouville-Probleme mit getrennten Randbedingungen über kompakten Intervallen J=[a,b] untersucht.

14.1 Problem: Mit Funktionen

#1# $q \in C(J,\mathbf{R})$ und $p \in C^1(J,\mathbf{R})$ mit $p>0$ auf J

betrachtet man den linearen Differentialoperator zweiter Ordnung

#2# $Lu:=-(pu')'+qu$,

und mit (α_0,α_1), $(\beta_0,\beta_1) \in \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ definiert man Randoperatoren

#3# $R_a u:=\alpha_0 u(a)+\alpha_1 u'(a)$
$R_b u:=\beta_0 u(b)+\beta_1 u'(b)$

Für eine Funktion $\rho \in C(J,\mathbf{R})$ mit $\rho>0$ auf J sucht man Eigenwerte und Eigenfunktionen des Sturm-Lioville-Problems

#4# $$\left| \begin{array}{l} Lu(x)=\lambda\rho(x)u(x) \\ R_a u = R_b u = 0 \end{array} \right.$$

d.h. Lösungen $u\neq 0$ der Gleichung $Lu=\lambda\rho u$ im Raum

#5# $C_R^2(J):=\{\, u \in C^2(J) \mid R_a u = R_b u = 0 \,\}$

14.2 Satz

a) Mit dem L_2-Skalarprodukt $<.,.>:=<.,.>_{L_2}$, gegeben durch

$$<f,g>:=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx ,$$

gilt

#6# $<Lu,v>=<u,Lv>$ für $u,v \in C_R^2(J)$

b) Alle Eigenwerte des Problems #4# sind reell.

c) Für Eigenfunktionen φ_1, φ_2 von #4# zu verschiedenen Eigenwerten gilt:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\rho(x)\,dx = 0$$

14.3 Satz: Die Menge der Eigenwerte von #4# ist eine abzählbare Teilmenge von **R** ohne Häufungspunkt.

14.4 Bemerkung

a) Annahme: 0 kein Eigenwert von #4#

b) Es seien v_1, v_2 die Lösungen des Anfangswertproblems Lu=0,

#9# $v_1(a)=1$, $v_1'(a)=0$; $v_2(a)=0$, $v_2'(a)=1$

$\{v_1,v_2\}$ ist Fundamentalsystem von Lu=0.

Setze

#11#
$$\begin{cases} u_1 = (R_a v_2)v_1 - (R_a v_1)v_2 \\ u_2 = (R_b v_2)v_1 - (R_b v_1)v_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\{u_1,u_2\}$ Fundamentalsystem von Lu=0 mit: $R_a u_1=0$, $R_b u_2=0$

u_1, u_2 reell-wertig

c) Für $f\in C(J)$ löse die inhomogene Gleichung

#12# $Lu=-pu''-p'u'+qu=f$

#14# $\Rightarrow$ $v(x) = -\frac{1}{c}\int_a^x (u_1(y)u_2(x) - u_2(y)u_1(x))\,f(y)\,dy$ löst #12# mit $R_a v=0$

Setze

#15#
$$u(x) = v(x) - \tfrac{1}{c}\int_a^b u_2(y)\,f(y)\,dy \cdot u_1(x)$$

$\Rightarrow$ $Lu=f$, $R_a u=0$, auch $R_b u=0$

d) Definiere die <u>Greensche Funktion</u>

#16#
$$G(x,y) = \begin{cases} -\tfrac{1}{c}u_1(y)u_2(x) & ,y \le x \\ -\tfrac{1}{c}u_1(x)u_2(y) & ,y \ge x \end{cases}$$

Dann ist G stetig, $G(x,y)=G(y,x)$, $x,y\in J$, reellwertig

Nach #15# und #16# ist für $f\in C(J)$ die Funktion

#17#
$$K_G f(x) := \int_a^b G(x,y)\,f(y)\,dy \in C_R^2(J)$$

die eindeutige Lösung von $Lu=f$ in $C_R^2(J)$.

Die linearen Operatoren

#18# $L: C_R^2(J) \to C(J)$, $K_G: C(J) \to C_R^2(J)$

sind <u>invers zueinander</u>.

14.5 Beispiel

14.6 Bemerkung

a) $K_G\in L(C(J))$ Integraloperator mit stetigem Kern.

Dieser ist <u>symmetrisch</u> bzgl. $<.,.>_{L_2}$.

b) Sei $u\in C_R^2(J)$ mit $Lu=\lambda\rho u$ $\Rightarrow$ $u=\lambda K_G(\rho u)$

Für den Operator $K_G^\rho\in L(C(J))$,

#21#
$$K_G^\rho(f) = K_G(\rho f) = \int_a^b G(x,y)\,f(y)\rho(y)\,dy$$

gilt: Die Eigenfunktionen von #4# stimmen mit denen von K_G^ρ überein, wobei die Eigenwerte reziprok zueinander sind.

c) Für $\rho \neq c$ ist K_G^ρ nicht symmetrisch bzgl. $<.,.>_{L_2}$.

Verwende daher

#22# $$< f, g >_\rho = < f, \rho g >_{L_2} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$$

Es ist $\|\,.\,\|_\rho \sim \|\,.\,\|_{L_2}$.

Also: K_G^ρ symmetrisch bzgl. $<.,.>_\rho$.

#24# d) $\|K_G^\rho f\|_{sup} \leq C_{\rho,G} \cdot \|f\|_\rho$

$K_G^\rho: (C(J), \|.\|_\rho) \to (C(J), \|.\|_{sup})$ stetig

$$\hat{K}_G^\rho : (L_2(J), \|\,.\,\|_\rho) \underset{stetig}{\to} (C(J), \|\,.\,\|_{\sup}) \overset{Inklusion}{\underset{stetig}{\to}} (L_2(J), \|\,.\,\|_\rho)$$

symmetrisch und selbstadjungiert

15. Der Satz von Arzelà-Ascoli

15.1 Definition: X,Y metrische Räume.

Eine Menge $M \subseteq C(X,Y)$ heißt <u>gleichstetig</u>, falls:

#1# $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0\ \forall\, x_1,x_2 \in X\ \forall\, f \in M$: $d(x_1,x_2)<\delta \Rightarrow d(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$

15.2 Beispiel

Sei $M \subseteq C^1[a,b]$ mit $\|f'\|_{sup} \leq c\ \ \forall\, f \in M \Rightarrow$ M gleichstetig in C[a,b]

15.3 Theorem (Arzelà-Ascoli)

Es sei X ein kompakter metrischer Raum.

$M \subseteq C(X,\mathbf{K})$ ist genau dann

a) präkompakt, wenn M beschränkt und gleichstetig ist.
b) kompakt, wenn M beschränkt, gleichstetig und abgeschlossen ist.

Hier wird nur „$\Leftarrow$“ für kompakte Intervalle X benötigt.

15.4 Satz: X kompakt.

Eine (punktweise) beschränkte gleichstetige Folge (f_n) in C(X) besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

15.5 Lemma: Es seien Y eine abzählbare Menge und $(f_n) \subseteq G(Y)$ eine punktweise beschränkte Folge.

Dann hat (f_n) eine punktweise konvergente Teilfolge.

15.6 Lemma: X kompakter metrischer Raum.

Es ei $(g_n) \subseteq C(X)$ gleichstetig und auf einer dichten Teilmenge Y von X punktweise konvergent.

Dann ist (g_n) gleichmäßig konvergent auf X.

15.7 Beispiel

a) $J=[a,b]$, $k \in C(J^2)$

#2# $$Kf(x) := \int_a^b k(x,y) f(y)\,dy$$

#3# $$\|Kf\|_{\sup} \leq \sqrt{b-a}\,\|K\|_{\sup}\,\|f\|_{L_2} \quad , f \in C(J)$$

#4# $$\hat{K}_G^\rho : L_2(J) \to (C(J), \|\,.\,\|_{\sup}) \underset{Inklusion}{\to} L_2(J)$$

b) $\hat{K}_G^\rho : (L_2(J), \|\,.\,\|_\rho) \to (L_2(J), \|\,.\,\|_\rho)$ selbstadjungiert, kompakt

16. Hilberträume

16.1 Definition: Ein Vektorraum E über $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ oder $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ mit einem Skalarprodukt $<,>: E \times E \to \mathbf{K}$, der unter der Norm

#1# $$\|x\| := \sqrt{<x,x>} \quad , x\in E$$

vollständig ist, heißt Hilbertraum.

16.2 Beispiel

a) Es seien $J=[a,b]$ und $\rho\in C(J,\mathbf{R})$ mit $\rho>0$ auf J. Die Vervollständigung $(L_2(J), \|.\|_\rho)$ von C(J) unter der L_2-Norm äquivalenten Norm $\|.\|_\rho$ ist der Hilbertraum $L_2(J)$ der (Äquivalenzklassen von) quadratintegrierbaren Funktionen auf J.

b) Der Raum der quadratsummierbaren Folgen

#4# $$l_2:=l_2(\mathbf{N}):=\{\ x=(x_i)_{i\in\mathbf{N}} \mid \|x\|^2:=\sum_{i\in\mathbf{N}}|\ x_i\ |^2<\infty\ \}$$

ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

#5# $$<x,y>:=\sum_{i\in\mathbf{N}} x_i\bar{y}_i\ .$$

16.3 Definition: Es sei E ein Hilbertraum.

a) $x,y\in E$ heißen ortogonal ($x\perp y$), falls $<x,y>=0$ gilt.

b) Eine Menge $\{e_i\}_{i\in I}\subseteq E$ heißt Orthonormalsystem, falls gilt:

$$<e_i,e_j>=\delta_{i,j}.$$

c) Für ein Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i\in I}$ in E und $x\in E$ heißen die Zahlen

#6# $$\hat{x}(i):=<x,e_i> \quad , i\in I,$$

Fourier-Koeffizienten von x bezüglich $\{e_i\}_{i\in I}$.

16.4 Satz: Es sei $\{e_i\}_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in E.

a) Für eine endliche Teilmenge $I'\in Q(I)$ gilt

#7# $$\|\sum_{i\in I'}\xi_i e_i\ \|^2=\sum_{i\in I'}|\xi_i|^2 \quad , \xi_i\in\mathbf{K},$$

#8# $$\|\ x-\sum_{i\in I'}\hat{x}(i)e_i\ \|^2=\|x\|^2-\sum_{i\in I'}|\hat{x}(i)|^2 \quad , x\in E.$$

b) (Besselsche Ungleichung): Im Fall $I=\mathbf{N}$ gilt $(\hat{x}(i))_{i\in\mathbf{N}}\in l_2$ für $x\in E$ sowie

#9# $$\sum_{i\in\mathbf{N}}|\hat{x}(i)|^2\le\|x\|^2.$$

16.5 Bemerkungen und Definitionen

a) Es sei $\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum E. Für $\xi=(\xi_i)\in l_2$ ist dann die Reihe $\sum_{i\in\mathbf{N}}\xi_i e_i$ in E konvergent.

(Die Konvergenz ist unbedingt (also: gegenüber Vertauschungen stabil), aber nicht absolut.)

b) Die lineare Fourier-Abbildung

#11# $$G: E\to l_2 \quad , G(x):=(\hat{x}(i))_{i\in\mathbf{N}}$$

ist stets surjektiv und es gilt $\|G\|\le 1$.

16.6 Definition: Es sei H ein Hilbertraum.

a) Für $M\subseteq E$ wird durch $M^\perp:=\{\ x\in E \mid <x,y>=0\ \ \forall\ y\in M\ \}$ das Orthogonalkomplement von M definiert.

b) Ein Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i\in I}$ in E mit $\{e_i\}^\perp=\{0\}$ heißt maximal.

Für $x\in M^\perp$ bzw. $N\subseteq M^\perp$ schreibt man $x\perp M$ bzw. $N\perp M$.

16.7 Satz: Für ein Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ in einen Hilbertraum E sind äquivalent:

a) Es gilt $\sum_{i=1}^{\infty}\hat{x}(i)e_i$ für alle $x\in E$.

b) Für alle $x\in E$ gilt die Parsevalsche Gleichung

#12# $$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\hat{x}(i)\right|^2 = \|x\|^2 .$$

c) Die Fourier-Abbildung G: $E \to l_2$ ist isometrisch.

d) Die lineare Hülle span{ e_i | $i\in\mathbf{N}$ } von $\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ ist dicht in E.

e) Die Fourier-Abbildung G: $E \to l_2$ ist injektiv.

f) Das Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ ist maximal.

16.8 Definition: Ein Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ in einem Hilbertraum E heißt vollständig oder eine Orthonormalbasis von E, falls es maximal ist.

16.9 Satz: Ein unendlichdimensionaler Hilbertraum E besitzt genau dann eine abzählbare Orthonormalbasis, wenn E separabel ist. In diesem Fall ist E isometrisch isomorph zum Folgenraum l_2.

16.10 Beispiele und Bemerkungen: Die Hilberträume $L_2[a,b]$ sind also zum Folgenraum l_2 isometrisch isomorph, da sie nach dem Weierstraßschen Approximationssatz separabel sind (dies gilt auch für $L_2(A)$, $A\subseteq\mathbf{R}^n$ meßbar). Aus diesem Grunde sind E. Schrödingers Wellenmechanik und W. Heisenbergs Matrizenmechanik äquivalente Formulierungen der Quantenmechanik.

16.11 Beispiele

a) Die Funktionen $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ bilden eine Orthonormalbasis von $L_2[-\pi,\pi]$ bezüglich $\rho = \frac{1}{2\pi}$. Insbesondere ergibt sich die Parsevalsche Gleichung

#14# $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \text{für } f,g\in L_2[-\pi,\pi].$$

b) Die Funktionen $\{\sin(kx)\}_{k\in\mathbf{N}}$ bilden eine Orthonormalbasis von $L_2[0,\pi]$ bezüglich $\rho = \frac{2}{\pi}$.

16.12 Satz: Es seien E ein separabler Hilbertraum und $F\subseteq E$ ein abgeschlossener Unterraum mit Orthonormalbasis $\{f_i\}_{i\in\mathbf{N}}$.

a) Für $x\in E$ gibt es genau ein $x_1\in F$ mit $x-x_1\perp F$, nämlich

#15# $$x_1 = Px := \sum_{i=1}^{\infty}\hat{x}(i)\,f_i .$$

b) Man hat die direkte Zerlegung

#16# $$E=F\oplus F^{\perp}=R(P)\oplus N(P),$$

und P: $x_1+x_2 \mapsto x_1$ ist die entsprechende orthogonale Projektion von E auf F. Man hat $P\in L(E)$, $P^2=P$ und $\|P\|=1$.

Für $x,y\in E$ gilt

#17# $$<Px,y>=<Px,Py>=<x,Py>.$$

16.13 Folgerung: Für einen Unterraum M eines separablen Hilbertraums E gilt

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M} .$$

17. Spektralzerlegungen

17.1 Definition: Es sei E ein separabler Hilbertraum über **K**=**R** oder **K**=**C**.

a) $T\in L(E)$ heißt kompakt, wenn das Bild $T(\overline{K}_1(0))$ der Einheitskugel von E in E relativ kompakt ist.

b) $A\in L(E)$ heißt selbstadjungiert, wenn

#1# $$<Ax,y>=<x,Ay> \quad , x,y\in E$$

gilt.

17.2 Beispiele, Bemerkungen

a) $T\in L(E)$, $\dim R(T)<\infty \;\Rightarrow\;$ T kompakt

$I=I_E$ kompakt $\Leftrightarrow$ dim $E<\infty$

b) P orthogonale Projektion $\Rightarrow$ P selbstadjungiert (#16.17#)

c) $A\in L(E)$ selbstadjungiert $\Rightarrow$ quadratische Form

$$Q_A(x)=<Ax,x>\in \mathbf{R}$$

Es gilt

#2# $Q_A(x+y)+Q_A(x-y)=2(Q_A(x)+Q_A(y))$ Parallelogrammgleichung

#3# $Q_A(x+y)-Q_A(x-y)=4\mathrm{Re}<Ax,y>$ Polarisationsgleichung

17.3 Satz: Für $A\in L(E)$ selbstadjungiert gilt

#4# $$\| A\|=\sup_{\|x\|\le 1}|<Ax,x>| \quad (=:q(A))$$

17.4 Definition: $T\in L(E)$.

a) $\sigma(T)=\{\lambda\in \mathbf{K} \mid \lambda I-T\notin GL(E)\}$ Spektrum von T;

$\rho(T)=\mathbf{K}\setminus\sigma(T)$ Resolventenmenge

$R_T: \rho(T)\to L(E)$, $R_T(\lambda)=(\lambda I-T)^{-1}$ Resolvente.

b) $\lambda\in\mathbf{K}$ Eigenwert zum Eigenvektor $x\neq 0$, falls $Tx=\lambda x$ gilt.

17.5 Lemma: Es sei $A\in L(E)$ selbstadjungiert und kompakt.

Dann ist $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert von A.

17.6 Theorem (Spektralsatz): dim $E=\infty$, $A\in L(E)$ selbstadjungiert, kompakt.

Dann gibt es eine reelle Folge $\lambda_j\to 0$ mit $|\lambda_j|\ge|\lambda_{j+1}|$ und ein Orthonormalsystem $\{e_j\}$ in E mit

#5# $$Ax=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j <x,e_j>e_j \quad , x\in E \quad \text{(Konvergenz in Operatornorm)}$$

#6# Es ist $\sigma(A)=\{0\}\cup\{\lambda_j \mid j\in\mathbf{N}\}$

#7# $N(\lambda_j I-A)=\mathrm{span}\{e_i \mid \lambda_i=\lambda_j\}$ für $\lambda_j\neq 0$

17.7 Bemerkung: A injektiv $\Leftrightarrow$ $\{e_j\}$ <u>Orthonormalbasis</u> und alle $\lambda_j\neq 0$.

17.8 Beispiel: Anwendung auf $A=K_G^{\rho}$.

Eigenwert μ_j von K_G^{ρ}: $\mu_j=\frac{1}{\lambda_j}$,

λ_j Eigenwert von $Lu=\lambda\rho u$, $R_a u=R_b u=0$

Für die Eigenfunktionen gilt

$$e_j=\lambda_j K_G^{\rho}e_j\in C_R^2(J)$$

Man hat

#11# $$\begin{aligned}K_G^{\rho}f(x)&=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j <f,e_j>_{\rho}\, e_j\\ &=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j\int_a^b f(t)\overline{e_j(t)}\rho(t)\,dt\; e_j(x)\end{aligned}$$

nicht nur in $L_2(J)$, sondern <u>absolut</u> und <u>gleichmäßig</u> auf J.

17.9 Theorem (Entwicklungssatz)

a) Das Problem

$Lu=\lambda\rho u$, $R_a u=R_b u=0$ (#14.4#)

besitzt unendlich viele Eigenwerte $(\lambda_j)\subseteq\mathbf{R}$ mit $|\lambda_j|\to\infty$.

Diese sind einfach, und die bzgl. $\|.\|_{\rho}$ normierten Eigenfunktionen (ϕ_j) bilden eine Orthonormalbasis von $(L_2(J), \|.\|_{\rho})$.

#12# b) Für $u\in C_R^2(J)$ gilt $u(x)=\sum_{j=1}^{\infty}<u,\phi_j>_{\rho}\,\phi_j(x)$ absolut und gleichmäßig auf J

#13# und $Lu=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j <u,\phi_j>_{\rho}\,\phi_j$ in $L_2(J)$.

17.10 Bemerkung

a) Das Problem (#14.4#) hat nur endlich viele negative Eigenwerte; $\lambda_j \to \propto$

$\exists\ 0<c<C$ mit $c\cdot j^2 \leq \lambda_j \leq C\cdot j^2$

b) $\Rightarrow$ Wellengleichung wie in Abschnitt 13

$$Lu = \partial_t^2 u$$

oder Wärmeleitungsgleichung

$$Lu = \partial_t u$$

Index zu Gewöhnliche Differentialgleichungen