

9. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 17.12.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Numerischer Aufwand bei Polynominterpolation*

Es sei $p \in P_n$ das Lagrangesche Interpolationspolynom zu $n + 1$ paarweise verschiedenen Stützstellen x_0, \dots, x_n und den zugehörigen Stützwerten y_0, \dots, y_n . Bestimmen Sie die Anzahl der benötigten arithmetischen Operationen zur Berechnung von $p(\xi)$ an einer Stelle ξ

- bei Verwendung der Lagrangeschen Darstellung von p ,
- bei Verwendung der Newtonschen Darstellung von p ,
- bei Anwendung des Neville-Algorithmus,
- bei Verwendung der Monombasis von p .

Aufgabe 2 *Eigenschaften der dividierten Differenzen*

Gegeben sei $f \in C^{n+1}[a, b]$. Verifizieren Sie folgende Aussagen für die dividierten Differenzen $f[x_0, \dots, x_n]$ von f bzgl. paarweise verschiedener Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$:

- Für beliebige Permutationen x'_0, \dots, x'_n der Stützstellen x_0, \dots, x_n ist $f[x'_0, \dots, x'_n] = f[x_0, \dots, x_n]$.
- Für $f \in P_{n-1}$ ist $f[x_0, \dots, x_n] = 0$.
- Es gibt ein $\xi \in [a, b]$ so, daß $f[x_0, \dots, x_n] = f^{(n)}(\xi)/n!$ gilt.

Aufgabe 3 *Extrapolation*

x	$f(x)$
0.38	0.389211590
0.39	0.399961960
0.40	0.410752326
0.41	0.421583767
0.42	0.432457368

Aus den oben angegebenen Funktionsauswertungen von $f(x) = \sinh(x)$ sollen durch Extrapolation möglichst gute Näherungen für Funktionswerte bestimmt werden.

- Bestimmen Sie eine Näherung für $f'(0.4)$ durch Extrapolation des zentralen Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.
- Leiten Sie mit Hilfe der Taylor-Entwicklung einen zentralen Differenzenquotienten für die zweite Ableitung einer Funktion her.
- Bestimmen Sie eine Näherung für $f''(0.4)$ durch Extrapolation des zentralen Differenzenquotienten aus Teil b).