

### 3. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 05.11.2008, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

#### Aufgabe 1 Wurzelberechnung mit Gleitpunkt-Arithmetik

Auf einer Rechenmaschine sei 4-stellige Gleitpunktarithmetik ( $a = 0.m_1m_2m_3m_4 \cdot 10^{\pm E}$ ) mit natürlicher Rundung möglich, wobei die Grundoperationen gemäß  $x \circledast y = \text{rd}(x * y)$  realisiert sind.

- Berechnen Sie unter diesen Bedingungen (4-stellige Rundung) möglichst gute Näherungen für die Wurzeln der Gleichung  $x^2 - 39.6x + 1 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Fall dass bei ungünstiger Rechnung Auslöschung auftritt.
- Zeigen Sie, dass der relative Fehler bei der Operation  $\text{rd}(\sqrt{\text{rd}(x)})$  in erster Näherung durch  $3/2 \text{eps}$  beschränkt ist.
- Geben Sie Schranken für den relativen Fehler an, den Sie bei a.) gemacht haben (berücksichtigen Sie nur die tatsächlich gemachten Rundungen).

#### Aufgabe 2\* Kondition und Gutartigkeit

Gesucht ist ein Algorithmus zur Auswertung der Funktion

$$f(\varphi, \lambda) = \frac{4/5}{\sqrt{\pi \cos^2 \varphi + \lambda \sin^2 \varphi}}, \quad \varphi \in (0, \pi/2), \quad \lambda \in (\pi/4, \pi).$$

- Ist diese Aufgabe gut konditioniert? *Hinweis:*  $ab \leq (\pi a^2 + \lambda b^2)/(2\sqrt{\pi\lambda})$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- Die durch die Umformung  $f(\varphi, \lambda) = 0.8 \cdot (\pi + (\lambda - \pi) \sin^2 \varphi)^{-1/2}$  induzierte Auswertungsmethode vermeidet die Berechnung von  $\cos \varphi$  und ist somit schneller als die direkte Auswertung. Vergleichen Sie die beiden Wege in Hinblick auf ihre numerische Gutartigkeit.

#### Aufgabe 3 Die natürliche Matrizenorm

Zeigen Sie, daß für jede Vektornorm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{C}^n$  durch

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|/\|x\|, \quad x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$$

eine mit ihr verträgliche Matrizenorm erklärt ist. Sie heißt die von  $\|\cdot\|$  erzeugte „natürliche“ Matrizenorm. Warum ist die Quadratsummennorm  $\|A\| := \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2\right)^{1/2}$  keine natürliche Matrizenorm?

Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

- a) Die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sind reell.
- b) Eine hermitesche Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.
- c) Für eine positiv definite Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gilt mit ihrem kleinsten bzw. größten Eigenwert  $\lambda_{\min}$  bzw.  $\lambda_{\max}$  :

$$\lambda_{\min} \|x\|_2^2 \leq (Ax, x)_2 \leq \lambda_{\max} \|x\|_2^2, \quad x \in \mathbb{C}^n .$$