

6. Übungsblatt zu Analysis III

WS 2008/09, 17.11.2008

Aufgabe 22 Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\alpha$ und $f(\mathbf{0}) = 0$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert

a) $\int_{\|\mathbf{x}\| < 1} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ bzw.

b) $\int_{\|\mathbf{x}\| > 1} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Aufgabe 23 Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge mit $\lambda^n(E) < \infty$. Zeigen Sie, dass für $1 < p < q$ gilt:

a) $\mathcal{L}^q(E) \subset \mathcal{L}^p(E)$,

b) die obige Inklusion ist echt (Hinweis: Aufgabe 22) und

c) die Inklusion ist falsch, falls $E = \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 24 Die Halbkugel $H \subset \mathbb{R}^3$ sei durch $H = \{\mathbf{x} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$ definiert. Aus H wird der Zylinder $Z = \{\mathbf{x} : x^2 + y^2 \leq 4\}$ *ausgebohrt*. Berechnen Sie das Volumen von $H \setminus Z$. Beschreiben Sie kurz, was sich ändert, wenn die Kugel H durch $\{\mathbf{x} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 9\}$ und Z durch $\{\mathbf{x} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 4\}$ ersetzt wird.

Aufgabe 25 Berechnen Sie das Trägheitsmoment $\int_K (x^2 + y^2) d(x, y, z)$ von K für $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (x - a)^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ mit Konstanten $a, r \in \mathbb{R}$ sowie für $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ und } 0 \leq z \leq h\}$ mit konstanter Höhe $h > 0$.

Aufgabe 26 Berechnen Sie die Schwerpunkte der Körper K mit

a) $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} < 1\}$ und

b) $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z, 0 < z < 1\}$.

Abgabe: In den Übungen.

Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:

www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0809