

4. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2008/09, 3.11.2008

Aufgabe 14 Konstruieren Sie eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Skizze) mit folgenden Eigenschaften:

- a) 1) $f_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$ punktweise fast überall,
2) $0 \leq f_n(x) \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$,
3) $\int f_n \rightarrow \infty$, für $n \rightarrow \infty$, und
- b) 1) $f_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$ punktweise fast überall,
2) $f_n(x) = 0$ für $x \notin [0, 1]$,
3) $\int f_n = 1$.

In welchem Zusammenhang stehen die Funktionfolgen mit den aus der Vorlesung bekannten Konvergenzsätzen?

Aufgabe 15 Überprüfen Sie, ob die Funktion f mit $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ über $(1, \infty) \times (1, \infty)$ integrierbar ist.

Aufgabe 16 Beweisen Sie für $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ die folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(x) dx \leq \log \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right)$$

Aufgabe 17 Skizzieren Sie G und berechnen Sie $\int_G f(x, y) d(x, y)$ für:

- a) $f(x, y) = x$ und G sei das beschränkte Gebiet zwischen den Kurven $\{(x, y) : y = x^2\}$ und $\{(x, y) : y - x = 6\}$, und
- b) $f(x, y) = e^{-y^5}$ und G sei das Gebiet, das von der y -Achse, der Geraden $y = 2$ und der Kurve $x = y^4$ berandet ist.

Abgabe: In den Übungen.

Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:

www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0809