

3. Übungsblatt zu Analysis III

WS 2008/09, 27.10.2008

Aufgabe 10 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionenfolgen (f_n) jeweils eine integrierbare Majorante g , und berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$:

$$\text{a) } f_n(x) = \begin{cases} \sin^n(x), & x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\text{b) } f_n(x) = \frac{1}{1 + (nx)^2},$$

$$\text{c) } f_n(x) = \begin{cases} \cos(x^n), & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\text{d) } f_n(x) = \begin{cases} \log(x + \frac{1}{n}), & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\text{e) } f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n, & 0 \leq x \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Aufgabe 11 Es sei $f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha x^n (1-x), & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ und $\alpha \geq 0$.

a) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie alle α mit $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$.

c) Bestimmen Sie für $\alpha < 2$ eine integrierbare Majorante g für f_n .

d) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ für $\alpha < 2$.

Aufgabe 12 Es seien $E, F \subset \mathbb{R}^n$ meßbare Mengen. Zeigen Sie, dass $E \cup F$, $E \cap F$ und $E \setminus F$ meßbare Mengen sind.

Aufgabe 13 Es sei $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es seien $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, p$ meßbare Funktionen. Zeigen Sie, dass $f(\mathbf{x}) := F(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))$ eine meßbare Funktion ist.

Abgabe: In den Übungen.

Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:

www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0809