

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 6

Abgabe: keine!

Aufgabe 1. Bestätigen Sie den Greenschen Satz für $P = xy$, $Q = x^2$ und $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{v} = (\sin x, xy)$ durch die Randkurve C des Gebiets $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi - x\}$ sowohl direkt als auch mit einem geeigneten Integralsatz.

Aufgabe 3. Gegeben sei im \mathbb{R}^2 das unregelmäßige n -Eck mit den Eckpunkten

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n) = (x_0, y_0).$$

Beweisen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, daß der Flächeninhalt durch

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

gegeben wird.

Aufgabe 4. Sei $H = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y\}$ und \vec{v} das Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)^T$.

Berechnen Sie

$$\int_H \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy$$

sowohl direkt wie auch mit einem geeigneten Integralsatz.