

4. Übungsblatt zu „Analysis I für Lehramt Gymnasium“ Wintersemester 2007/08

Abgabetermin: Mittwoch, 21.11.07, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 13: Zeigen Sie mit Hilfe der Funktionalgleichungen für Sinus und Kosinus die folgenden Formeln für alle $s \in \mathbb{R}$.

$$\text{a) } \sin s = 2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2} \quad \text{b) } \cos s = \cos^2 \frac{s}{2} - \sin^2 \frac{s}{2}$$

Leiten Sie Formeln für $\sin(3s)$ und $\cos(3s)$ her.

Aufgabe 14: a) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $f(f^{-1}(M))$ und $f^{-1}(f(M))$ für $M := (-\infty, 0]$.

b) Es sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung und $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

Gilt auch die umgekehrte Inklusion?

Aufgabe 15: Zeigen Sie, dass die angegebenen Folgen beschränkt sind.

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3+n^2} \right) \quad \text{b) } (4 \cos n - 3 \sin(n^2)) \quad \text{c) } \left(\frac{n^2}{4^n} \right)$$

Aufgabe 16: Es seien $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ zwei Abbildungen und $h := g \circ f$ deren Komposition. Zeigen Sie, dass gilt:

- a) f, g injektiv $\Rightarrow h$ injektiv
- b) f, g surjektiv $\Rightarrow h$ surjektiv
- c) f, g bijektiv $\Rightarrow h$ bijektiv
- d) h bijektiv $\Rightarrow f$ injektiv und g surjektiv

Überlegen Sie sich jeweils ein Gegenbeispiel für die umgekehrte Implikation.