

## 8. Übungsblatt zu Analysis I WS 2007/08, 4.12.2007

**Aufgabe 28** Untersuchen Sie die folgenden Mehrfachreihen (ggf. in Abhängigkeit von  $s, a, b$ ) auf Konvergenz:

$$\text{a) } \sum_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} 2^{-n+1} 3^{-2k-1} \quad \text{b) } \sum_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{(k^2 + n^2)^s} \quad \text{c) } \sum_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \binom{n}{k} a^n b^k$$

**Aufgabe 29** Es sei  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ . Berechnen Sie das Cauchyprodukt von  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{n=0}^{\infty} nq^n$  und anschließend den Reihenwert von  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 q^n$ .

**Aufgabe 30** Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte ([ $\cdot$ ] bezeichne die aus der Vorlesung bekannte Gaußklammer):

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right) \frac{1}{x-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{|x - 1|} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} [x + (x - [x])^2] \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} \text{ für } p, q \in \mathbb{Q} & \end{array}$$

Anleitung zu Aufgabenteil e): Betrachten Sie zunächst den Fall  $p, q \in \mathbb{N}$  und führen Sie anschließend den allgemeinen Fall darauf zurück.

**Aufgabe 31** Die Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sei monoton wachsend. Zeigen Sie, dass für jedes  $x_0 \in (a, b)$  der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  existiert und dass gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a, x_0)\}$$

Was lässt sich analog über  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  aussagen?

**Problem der Woche** Es sei  $(a_n)$  eine monoton fallende Nullfolge so, dass die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiere. Zeigen Sie, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$  gilt.