

12. Übung zur Linearen Algebra II

Bitte werfen Sie die bearbeiteten Aufgaben bis Dienstag, den 03. 07. 2007, um 10 Uhr in die vorgesehenen Briefkästen.

Wer sich bei Prof. Skutella in den Sommersemesterferien über Lineare Algebra und Analytische Geometrie prüfen lassen möchte, kann dies in der Woche vom 27. bis 31. August 2007 tun. Für die Anmeldung zur Prüfung benötigt man den entsprechenden Anmeldebogen vom Prüfungsamt. Mit diesem Bogen kann man sich dann einen Termin im Sekretariat von Prof. Skutella bei Frau Ley geben lassen (Raum 517 im Mathegebäude, täglich von 11:45 bis 14:30 Uhr).

Der für die Studierenden der Wirtschaftsmathematik relevante Prüfungstoff erstreckt sich bis einschließlich Kapitel VII §9 (Der Spektralsatz).

Aufgabe 1:

5 Punkte

- a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring ist. Hinweis: Betrachten Sie die von 2 und X erzeugten Ideale.
- b) Zeigen Sie, dass

$$A := \begin{pmatrix} 2X & 0 \\ X & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[X]^{2 \times 2}$$

zu keiner Diagonalmatrix äquivalent ist. Hinweis: Betrachten Sie die Ideale $\Delta_k(A)$.

Sie dürfen die folgenden Aussagen verwenden: Sei R ein Integritätsring, aber nicht unbedingt ein euklidischer Ring. Dann sind Teile der Definitionen und Aussagen aus Kapitel VIII §4 immer noch sinnvoll und korrekt. So können k -Minoren und die Ideale Δ_k ohne Probleme auch in Integritätsringen definiert werden. Nur die Determinantenteiler d_k müssen nicht existieren. Auch Satz 1 gilt insofern, dass R -elementare Umformungen die Δ_k nicht verändern.

Aufgabe 2:

6 Punkte

Beweisen Sie Lemma 1 aus Kapitel VIII §5 (Skript S. 87).

Ab hier Wiederholung!

Aufgabe 3:

5 Punkte

Wie viele Jordanblöcke haben die Jordannormalformen der folgenden Matrizen?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, B = \begin{pmatrix} -6 & -8 & 0 & 1 & -3 \\ -8 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$$

Aufgabe 4:

4 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und für $i = 1, \dots, n$ sei $z_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, d.h. die Summe der Beträge der Elemente der i -ten Zeile. Außerdem sei $Z = \max_{i=1, \dots, n} z_i$. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert λ von A gilt $|\lambda| \leq Z$.