

Funktionentheorie I

1. Übungsblatt, SS 2007

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : d(z, 1) < \frac{1}{2} \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : d(z, 1) < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : d(z, 1) < \frac{3}{4} \right\}, \quad M_4 = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : d(z, i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\},$$

$$M_5 = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : d(z, 0) < 1 \right\}, \quad M_6 = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : d(z, i) \leq 1 \right\}$$

b) Beweisen Sie, daß $\hat{K}_r(z_0)$ mit $r > 0$ eine euklidische Kreisscheibe, eine Halbebene, das Äußere eines euklidischen Kreises, \mathbb{C} oder $\widehat{\mathbb{C}}$ ist. In jedem Fall gilt $z_0 \in \hat{K}_r(z_0)$. Berechnen Sie für $z_0 \in \mathbb{C}$ die Menge aller $r > 0$, für die $\hat{K}_r(z_0)$ ein euklidischer Kreis ist. Bestimmen Sie auch den Mittelpunkt von $\hat{K}_r(z_0)$.

c) Bestimmen Sie für $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $r \geq 0$ die Mengen

$$C_r(z_0) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : d(z, z_0) = r\}.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgende Aussagen für die stereographische Projektion Φ :

a) Die Menge $K \subset S^2$ ist genau dann eine Kreislinie, wenn $\Phi(K)$ eine chordale Kreislinie ist.

b) Folgern Sie aus a) und Aufgabe 1 c): Die stereographische Projektion bildet Kreislinien auf S^2 , auf euklidische Kreislinien oder auf Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ ab.

Aufgabe 3

Die Menge $O \subset \widehat{\mathbb{C}}$ sei offen. Beweisen Sie:

a) Ist $O \subset \mathbb{C}$, so ist O auch offen in \mathbb{C} .

b) Ist $\infty \in O$, so ist $\mathbb{C} \setminus O$ kompakt in \mathbb{C} .

Aufgabe 4

Bestimmen Sie zu $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ den Antipodenpunkt, das heißt, den Punkt $z^* \in \widehat{\mathbb{C}}$, für den $\Phi^{-1}(z)$ und $\Phi^{-1}(z^*)$ auf der Zahlenkugel gegenüberliegen.

Abgabe: 10.04.2007, 10 Uhr

Übungsblätter und Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter
<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsex/uebungen/ft/ss07/>