

7. Hausaufgabenblatt zu gewöhnlichen Differentialgleichungen SS 2007, 21.05.2007

Aufgabe 22 Es seien f und g C^1 -Vektorfelder auf \mathbb{R}^2 , so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = 0$$

gilt. Zeigen Sie: Hat f eine geschlossene Trajektorie, so hat g eine Nullstelle.

Aufgabe 23 Konkurrierende Arten In dieser Aufgaben sollen Sie ein mathematisches Modell für einen biologischen Sachverhalt (vgl. z.B. Volterra-Lotka) entwickeln und interpretieren. Das Modell soll die zeitliche Entwicklung der Population zweier Spezies beschreiben, die etwa um gemeinsames Futter oder Lebensraum kämpfen. Die zugehörigen Wachstumsgleichungen haben die Form:

$$\begin{cases} \dot{x} = M(x, y)x \\ \dot{y} = N(x, y)y \end{cases} .$$

Dabei beschreiben $x, y \geq 0$ die Population und $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ die Wachstumsraten. Das System erfülle die folgenden drei Bedingungen:

- $\frac{\partial M}{\partial y} < 0$ und $\frac{\partial N}{\partial x} < 0$
- Es existiert $K > 0$ für das gilt: Sind $x, y > K$, so gilt $M, N \leq 0$.
- Es existieren $a, b > 0$ mit: Ist $x < a$, so ist $M(x, 0) > 0$ und ist $x > a$, so ist $M(x, 0) < 0$. Die symmetrische Bedingung gilt für b und N .

Nun folgen Ihre Aufgaben:

- a) Interpretieren Sie obige Bedingungen in Bezug auf das Modell.
- b) Zeigen Sie:
 - 1) Die Menge $\Omega = M^{-1}(0)$ schneidet jede vertikale Linie $\{x\} \times \mathbb{R}$ genau einmal, falls $0 \leq x \leq a$ gilt. Sie schneidet diese Linie nicht, falls $x > a$ ist.
 - 2) Die Menge $\Sigma = N^{-1}(0)$ schneidet jede horizontale Linie $\mathbb{R} \times \{y\}$ genau einmal, falls $0 \leq y \leq b$ gilt. Sie schneidet diese Linie nicht, falls $y > b$ ist.
 - 3) Es existiert ein $f \in C^1([0, a], \mathbb{R})$, so dass Ω der Graph von f ist.
 - 4) Es existiert ein $g \in C^1([0, b], \mathbb{R})$, so dass $\Sigma = \{(x, y) : x = g(y)\}$.
 - 5) Zeichnen und interpretieren Sie das Phasenraumportrait im Falle $\Omega \cap \Sigma = \emptyset$ und im Falle $\Omega \cap \Sigma \neq \emptyset$. Bringen Sie insbesondere viele Ihrer gelernten Begriffe ein und geben Sie deren Bedeutung für das Verhalten der Population an.

c) Konkret sei nun das folgende System gegeben:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(3 - 2x - y) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass dieses System unsere Voraussetzungen erfüllt. Skizzieren Sie anschliessend das Phasenraumportrait im ersten Quadranten. Untersuchen Sie das System auf Ruhelagen und Stabilität. Begründen Sie, in welchem Sinne es mathematisch möglich, aber sehr unwahrscheinlich ist, dass beide Spezies überleben.