

Stochastik I

Blatt 5

Abgabetermin: Freitag, 13. Mai 2005, in die Briefkästen im Foyer

Wiederholen Sie folgende Begriffe:Zufallsvariable, Borel- σ -Algebra, Meßbare Abbildungen, Produkt- σ -Algebra, Bildmaß, Verteilung einer Zufallsvariablen.**Aufgabe 1**

In einer Untersuchung der Dortmunder Mathematik-Studierenden wurden die folgenden Zahlen von Studenten bei den Merkmalen Haarfarbe und Schuhgröße ermittelt.

Haarfarbe / Schuhgröße	schwarz	blond	sonstig
bis 39	41	30	39
40 – 43	70	65	25
mind. 44	19	20	11

- Bestimmen Sie die Verteilungen der Merkmale Schuhgröße und Haarfarbe.
- Entscheiden Sie, ob die Merkmale Schuhgröße und Haarfarbe (im streng mathematischen Sinn) unabhängig sind.

Aufgabe 2

Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

- Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist A von Ω unabhängig.
- Es seien $A, B, C \in \mathcal{A}$. Ist A unabhängig von B und B von C , so ist A auch von C unabhängig.

- c) Es seien $A, B, C \in \mathcal{A}$. Ist A unabhängig von B und von C , so ist A unabhängig von $B \cap C$ und $B \cup C$.
- d) Es seien $A, B, C \in \mathcal{A}$. Ist A unabhängig von B, C und $B \cap C$, so ist A unabhängig von $B \cup C$ und von $B \cup \overline{C}$.
- e) Für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\}$ eine σ -Algebra auf A .
- f) Für jedes $A \subset \Omega$ ist $\mathcal{A}_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\}$ eine σ -Algebra auf A .

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.
Zeigen Sie:

- a) Für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(I)$ ein Intervall.
- b) f ist Borel-meßbar.

Aufgabe 4 (Das Hardy-Weinberg-Theorem der Genetik)

Ein Gen tritt in der menschlichen Bevölkerung in den Kombinationen AA, Aa, aa als Genotypen mit den relativen Häufigkeiten $u, 2v, w > 0$ auf. (Es gilt also $u + 2v + w = 1$.) Ist das Gen nicht geschlechtsgebunden, so überträgt beim Fortpflanzungsvorgang jedes Elternteil ein Gen seines Genpaares, und zwar wird jedes der beiden Gene gerade mit Wahrscheinlichkeit 0.5 ausgewählt, unabhängig vom anderen Elternteil. Hat etwa der Vater ein Genotyp Aa und die Mutter aa , so hat der Nachkomme jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,5 den Genotyp Aa bzw. aa . Denkt man sich Vater und Mutter als unabhängig voneinander zufällig ausgewählt (was bei einem Gen, das keinen Einfluß auf die Partnerwahl hat, akzeptabel erscheint), so wird beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, daß Vater *und* Mutter Genotyp aa haben, gerade u^2 sein.

- a) Bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten $u_1, 2v_1, w_1$ von AA, Aa, aa in der ersten Generation von Nachkommen
- b) Bestimmen Sie für beliebige $k \in \mathbb{N}$ die relativen Häufigkeiten $u_k, 2v_k, w_k$ von AA, Aa, aa in der k -ten Generation von Nachkommen.
(Hinweis: Bestimmen Sie zuerst $u_2, 2v_2, w_2$, und schließen Sie dann auf den allgemeinen Fall.)

Aufgabe 5* Zusatzübung für früheren Stoff

- a) In einer Urne befinden sich w weiße, r rote und s schwarze Kugeln. Es wird r Mal gezogen, α) ohne β) mit Zurücklegen.
Wie groß ist - im Fall α) bzw. β) - die Wahrscheinlichkeit,
- a1) dabei k weiße Kugeln zu ziehen,
- a2) beim k -ten Zug weiß zu ziehen,
- a3) beim k -ten Zug erstmals weiß zu ziehen.
Stellen Sie geeignete Modelle auf! Zeigen Sie, dass es genügt, Modelle mit nur zwei Farben zu betrachten!
- b) Mit einem Würfel wird fünf Mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle geworfenen Augenzahlen voneinander verschieden sind.
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Roulette, dass nach dreißig Spielen alle erzielten Zahlen verschieden sind.