

3.Übungsblatt zur Vorlesung Differentialgeometrie II

---

Betrachte die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5,$$

$$\phi(x, y, z) := \left( \frac{1}{\sqrt{3}} xy, \frac{1}{\sqrt{3}} xz, \frac{1}{\sqrt{3}} yz, \frac{1}{2\sqrt{3}} (x^2 - y^2), \frac{1}{6} (x^2 + y^2 - 2z^2) \right).$$

**Aufgabe 1:**

Zeige  $\phi$  ist eine Immersion in  $p$  für alle  $p \neq 0$ .

**Aufgabe 2:**

Zeige:  $\phi(v) = \phi(w) \iff v = \pm w$ .

**Aufgabe 3:**

Zeige: Die Sphären um 0 in  $\mathbb{R}^3$  werden in Sphären um 0 in  $\mathbb{R}^5$  abgebildet.

**Aufgabe 4:**

Zeige:  $\phi|_{S^2[\sqrt{3}]} : S^2[\sqrt{3}] \longrightarrow S^4[1]$  ist eine isometrische Immersion.

**Aufgabe 5:**

Zeige: Die Abbildung in 4) induziert eine injektive Immersion  $\phi_0 : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow S^4$ .

Diese Immersion wird **Veronese-Einbettung** genannt, und das Bild  $\phi_0(\mathbb{RP}^2) \subseteq S^4$  ist eine Untermannigfaltigkeit, genannt **Veronese-Fläche**.