

9. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Aufgabe 1:

Die Funktionenfolge $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2n^2(\frac{1}{n} - x), & x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 0) \end{cases}$$

- a) Zeige: f_n ist Lebesgue-integrierbar und der punktweise Grenzwert $f = \lim f_n$ existiert.
- b) Bestimme $\int_0^1 f_n(x)dx$ und $\int_0^1 f(x)dx$.
- c) Widerspricht das Ergebnis dem Satz von der monotonen bzw. von der dominierten Konvergenz?

Aufgabe 2:

Bestimme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} dx$$

(Hinweis: Zeige zunächst: $\frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$.)