

Algebra I Übungsblatt 6

Aufgabe 21: Die Symmetriegruppe D_4 des Quadrats sei gegeben als Untergruppe der $O(2, \mathbb{R})$ [vgl. Vorlesung (3.18)].

- a) Zeigen Sie: Durch Einschränkung der obigen Operation erhält man Operationen der D_4 auf der vierelementigen Menge der Quadratecken bzw. auf der vierelementigen Menge der Quadratseiten bzw. auf der zweielementigen Menge der Diagonalen. Welche der vier Operationen (auch die uneingeschränkte) sind treu?
- b) Welchen Stabilisator und welche Bahn hat eine Ecke bzw. eine Seite bzw. eine Diagonale?
- c) Die D_4 operiert auch auf der sechselementigen Menge der ungeordneten Eckenpaare per Anwendung. Beschreiben Sie die Bahnen.

Aufgabe 22: Geben Sie in a) eine geeignete Operation auf einer vierelementigen Menge an. Zeigen Sie:

- a) Die Drehsymmetriegruppe eines Würfels ist isomorph zu S_4 .
- b) Die Symmetriegruppe eines Würfels ist $S_4 \times \mathbb{Z}_2$. (Tipp: Zeigen Sie u.a., dass die Drehgruppe ein Normalteiler ist und dass es einen Normalteiler mit zwei Elementen gibt.)

Aufgabe 23: Eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge X heißt *zweifach transitiv*, wenn es zu jeder Wahl von $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \in X^2$ ein Element $g \in G$ gibt mit $g \cdot x_i = x'_i$ für $i = 1, 2$.

- a) Sei V ein K -Vektorraum. Die affin-lineare Gruppe $AGL(V)$ operiert zweifach transitiv auf V .
- b) Die Diedergruppe D_6 operiert transitiv, aber nicht zweifach transitiv auf dem regelmäßigen Sechseck.
- c) Eine Gruppe G operiere transitiv auf der Menge X . Es gebe ein $x \in X$, so dass der Stabilisator G_x transitiv auf der Menge $X \setminus \{x\}$ operiere. Zeigen Sie, dass für alle $y \in X$ der Stabilisator G_y transitiv auf $X \setminus \{y\}$ operiert. Zeigen Sie weiter, dass G zweifach transitiv auf X operiert.

Aufgabe 24: Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

- a) Jede Gruppe der Ordnung p^2 ist abelsch.
- b) Eine Gruppe der Ordnung p^2 ist entweder zyklisch oder isomorph zum direkten Produkt $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.