

Symbolisches Rechnen

10. Übung

Aufgabe 36 Berechnen Sie zu den Polynomen $f_1 = x^3 - 2xy - 1$, $f_2 = x^2y + 1 \in \mathbb{Q}[x, y]$ eine reduzierte Gröbnerbasis bezüglich

- (i) der graduiert lexikographischen Termordnung mit $x >_{\text{Glex}} y$, bzw.
- (ii) der lexikographischen Termordnung mit $x >_{\text{lex}} y$.

Versuchen Sie, so wenig S-Polynome wie möglich zu berechnen.

Stellen Sie die Elemente der Gröbnerbasis mit Hilfe der Basis $\{f_1, f_2\}$ dar und umgekehrt.

Aufgabe 37 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ wird **Binom** genannt, wenn es aus zwei Monomen besteht, d.h. $f = a_1t_1 + a_2t_2$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ und $t_1, t_2 \in T$. Ein Ideal heißt **binomiales Ideal**, wenn es von Binomen erzeugt wird. Zeigen Sie:

- (i) Die reduzierte Gröbnerbasis eines binomialen Ideals I besteht aus Binomen (bezüglich einer beliebigen zulässigen Termordnung).
- (ii) Für $t_1 \in T$ ist $\text{NF}(t_1) = c \cdot t_2$ mit $c \in \mathbb{K}$ und $t_2 \in T$.

Aufgabe 38 Seien $g_1 = x^2 - y$, $g_2 = xy - 1$ und $g_3 = y^2 - x \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben.

- (i) Zeigen Sie, dass $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ eine Gröbnerbasis von $\mathfrak{a} = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ bezüglich der graduiert lexikographischen Termordnung mit $x > y$ ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass $\{[1], [x], [y]\}$ eine Vektorraumbasis von $\mathbb{Q}[x, y]/\mathfrak{a}$ ist und bestimmen Sie für Elemente $r_i := a_i[1] + b_i[x] + c_i[y]$ sowohl $r_1 + r_2$ als auch $r_1 \cdot r_2$.
- (iii) Bestimmen Sie für invertierbare Elemente aus $\mathbb{Q}[x, y]/\mathfrak{a}$ das Inverse.

Abgabe: Donnerstag, den 6.1.2004 bis 12.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.

Die nächste Übung wird vom 3.1.2005 vorgezogen auf den 20.12.2004, 14-16 Uhr. Treffpunkt ist Raum 538.