

Symbolisches Rechnen

9. Übung

Aufgabe 32 Sei \mathbb{K} ein Körper, $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ und $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ eine Gröbnerbasis bezüglich der Termordnung $<_T$.

- (i) Zeigen Sie: $\text{NF}(f + g, G) = \text{NF}(f, G) + \text{NF}(g, G)$.
- (ii) Gilt $\text{NF}(f \cdot g, G) = \text{NF}(f, G) \cdot \text{NF}(g, G)$?
- (iii) Zeigen Sie: $\text{NF}(f \cdot g, G) = \text{NF}(f \cdot \text{NF}(g, G), G)$.

Aufgabe 33 Seien $g_1 = x + y + z$, $g_2 = y^2 - 1$, $g_3 = z^3 - 1$ und $\mathfrak{a} = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

(i) Zeigen Sie, dass $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ eine Gröbnerbasis von \mathfrak{a} ist bezüglich der lexikographischen Termordnung mit $x > y > z$.

(ii) Bestimmen Sie für die folgenden Polynome jeweils die Normalform bezüglich G :

(a) $f_1 = 2x^2 + 4xy + 2xz - 3y^3z + 4y^2 - yz^3 - yz^2 + 5yz + 3y - 2$

(b) $f_2 = x^2 - 2xy^3 - 2xy^2z + 3xy + yz^3 - 3yz - z^3 - z^2$

Aufgabe 34 Seien g_1, g_2, g_3 und G wie in Aufgabe 41. Die Termordnung sei hier aber lexikographisch mit $y > z > x$. Zeigen Sie:

- (i) Es gibt eine Reduktionskette mit $y^2z - y^2x \xrightarrow{*}_G z - x$.
- (ii) Es gibt eine Reduktionskette mit $y^2z - y^2x \xrightarrow{*}_G z^2x - zx^2 - x^3 + 1$.
- (iii) G ist keine Gröbnerbasis.

Aufgabe 35 Sei $f_1 = x^2 - y$, $f_2 = xy - 1$ und $f_3 = x - y^2$. Bestimmen Sie eine Gröbnerbasis von $\mathfrak{a} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ bezüglich der lexikographischen Termordnung ($x > y$).

Abgabe: Donnerstag, den 16.12.2004 bis 12.15 Uhr in den Briefkästen im Mathematikgebäude.