

Analysis I für Lehramt Gymnasium

13. Übungsblatt, WS 2004/05

Abgabe bis Montag, 24. Januar 2005, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4xe^{-x^2}$ alle

- lokalen Extrema und Wendepunkte,
- Intervalle, in denen f streng monoton ist,
- Intervalle, in denen f konvex bzw. konkav ist,

und skizzieren Sie den Graphen von f .

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = (1 + \frac{1}{9}x^2)e^x$.

- Bestimmen Sie das 2. Taylorpolynom T_2 von f an der Stelle $x_0 = 0$.
- Zeigen Sie für alle $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| < \frac{1}{100}.$$

Aufgabe 3

- Bestimmen Sie das 2. Taylorpolynom T_2 von $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ an der Stelle $x_0 = 0$.
- Zeigen Sie $\left| T_2\left(-\frac{1}{8}\right) - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{8}} \right| \leq \frac{5}{7^3 \cdot 81}$.
- Geben Sie mit Hilfe von b) eine Näherung für $\sqrt[3]{7}$ an.

Aufgabe 4

Sei $R > 0$ und T_k das k -te Taylorpolynom von $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$.

- Zeigen Sie, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|\cos x - T_m(x)| < \varepsilon$$

für alle $|x| < R$.

- Bestimmen Sie die Taylorpolynome T_k , $k = 2, 3, 4$.